Graphisch-mechanische Ausgleichung trigonometrisch eingeschalteter Punkte

von

Heinrich Hohenner,
a.o. Professor der Geodäsie an der kgl. techn. Hochschule in Stuttgart.

Von der kgl. Technischen Hochschule zu München zur Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften (Doktor-Ingenieurs) genehmigte Dissertation.

Referent: Prof. Dr. **Max Schmidt,**
Korreferent: Prof. Dr. **Sebastian Finsterwalder.**

Stuttgart 1904.
Verlag von Konrad Wittwer.

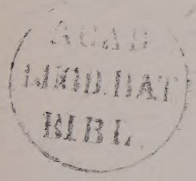
Graphisch-mechanische Ausgleichung trigonometrisch eingeschalteter Punkte

von

Heinrich Hohenner,
a.o. Professor der Geodäsie an der kgl. techn. Hochschule in Stuttgart.

Von der kgl. Technischen Hochschule zu München zur Erlangung der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften (Doktor-Ingenieurs) genehmigte Dissertation.

Referent: Prof. Dr. **Max Schmidt,**
Korreferent: Prof. Dr. **Sebastian Finsterwalder.**



Stuttgart 1904.
Verlag von Konrad Wittwer.

Druck von A. Bonz' Erben in Stuttgart.

Inhalts-Verzeichnis.

Seite

Einleitung 1

I. Abschnitt. Ausgleichung eines vorwärts eingeschnittenen Punktes.

1. Ableitung der Widersprüche 3
2. Aufzeichnung der Schnittstrahlen 5
3. Ableitung des mechanischen Ausgleichsverfahrens 6
4. Ausgleichung des vorwärts eingeschnittenen Punktes, Bestimmung der endgültigen Koordinaten und Direktionswinkel 11
5. Ausgleichung des vorwärts eingeschnittenen Punktes I 12

II. Abschnitt. Ausgleichung eines rückwärts eingeschnittenen Punktes.

6. Ableitung der Widersprüche und der Bedingungsgleichungen für den ausgleichenden Punkt 14
7. Graphische Darstellung der Beobachtungen 15
8. Ableitung des Ausgleichsverfahrens 16
9. Bestimmung guter Näherungswerte für die Orientierung des Satzes, der endgültigen Koordinaten und Direktionswinkel 18
10. Ausgleichung des rückwärts eingeschnittenen Punktes II . . . 20

III. Abschnitt. Ausgleichung eines vor- und rückwärts eingeschnittenen Punktes.

11. Ableitung der Widersprüche 23
12. Graphische Darstellung der Beobachtungen 24
13. Aufstellung der Bedingungsgleichungen für den ausgleichenden Punkt, Ausgleichsverfahren 24
14. Ausgleichung des kombiniert eingeschnittenen Punktes III . . . 26

IV. Abschnitt. Genauigkeit des ausgeglichenen Punktes 29

15. Untersuchung der Fehlerkurve 31

V. Abschnitt. Genauigkeit des mechanischen Ausgleichsverfahrens.

16. Methodische (Rechnerische) Ausgleichung des Punktes III . . 33
17. Mechanische Ausgleichung der Punkte IV, V und VI 37
18. Vergleichung der Resultate der rechnerischen und mechanischen Ausgleichung von 6 Punkten 39

Einleitung.

Wenn in einem Koordinatensysteme mehrere Punkte durch ihre Koordinaten gegeben sind, so kann die trigonometrische Bestimmung von Neupunkten durch Punkteinschaltung oder durch Netzeinschaltung erfolgen. In der laufenden trigonometrischen Praxis wird die fortgesetzte Punkteinschaltung am meisten angewendet.

Ein einzuschaltender Punkt kann durch Winkelmessungen auf zwei gegebenen Punkten, auf dem gesuchten Punkte oder auf einem gegebenen und auf dem gesuchten Punkte bestimmt werden; der Neupunkt heißt dementsprechend vorwärts, rückwärts oder seitwärts eingeschnitten. Wenn mehr als zur eindeutigen Bestimmung des Punktes notwendige Winkel gemessen sind, dann erhält man wegen der unvermeidlichen Messungsfehler im allgemeinen von einander verschiedene Lösungen und es ist dann durch eine Ausgleichung die plausibelste Lage des Neupunktes zu bestimmen.

Außer der „Methode der kleinsten Quadrate“ gibt es hierzu mehrere Ausgleichsmethoden; einige derselben werden in der trigonometrischen Praxis vielfach benützt, obwohl bekannt ist, daß der durch deren Anwendung verursachte Zeitaufwand von dem durch Benützung der strengen Methode (bei ausgiebiger Verwendung von Diagrammen oder Tafeln und hauptsächlich des Rechenschiebers) erforderten meist nicht so sehr abweicht als vielfach angenommen wird. Bei den (Näherungs)-Methoden wird ein großer Teil der Zahlenrechnungen der strengen Methode durch graphische Konstruktionen ersetzt.

Die älteste mir bekannt gewordene graphische Ausgleichungsmethode rührt von Tulla her und ist im Anhange seines Buches[1]) beschrieben. Helmert deutet in seinen „Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höhern Geodäsie“[2]) eine Konstruktion zur Auffindung des wahrscheinlichsten Punktes sowie dessen mittleren

[1]) Tullas Annäherungskonstruktionen. Bearbeitet von J. F. Ladomus. Nebst einem Anhang enthaltend: Tullas Methode der graphischen Zentrierung der Winkel und der Korrektion der Seiten und Winkel der Dreiecke bei geodätischen Vermessungen. Ausgearbeitet von J. Zipfel. Karlsruhe 1832.

[2]) Zeitschrift für Mathem. u. Physik 1868. S. 91.

Fehlers an. Das Bertotsche Verfahren[3]) liefert die richtige Lage des wahrscheinlichsten Punktes aber nicht die Genauigkeit der Koordinaten. Das Näherungsverfahren von Franke[4]) läßt die Ermittelung mittlerer Koordinatenfehler zu, ebenso die Methoden von Klingatsch[5]) und Puller[6]). Weitere Konstruktionen wurden u. a. von d'Ocagne[7]) und von Genge[8]) angegeben. Außer den angeführten Konstruktionen möge auch die Näherungsmethode von Hammer[9]) erwähnt werden. Fischer[10]) hat ein Ausgleichsverfahren erfunden, welches auf graphisch-mechanischem Wege den wahrscheinlichsten Punkt liefert.

Bei der im folgenden dargestellten Methode war das Bestreben maßgebend ein Ausgleichsverfahren zu finden, welches die Lage **und** die mittleren Koordinatenfehler des der Methode der kleinsten Quadrate entsprechenden (unter bestimmten Voraussetzungen) wahrscheinlichsten Punktes bei möglichst geringem Zeitaufwand mit genügender Schärfe liefert. Inwieweit das Ziel erreicht wurde geht aus der am Schlusse dieser Abhandlung vorgenommenen Vergleichung der nach diesen beiden Methoden gefundenen Resultate hervor, so daß der Leser die praktische Brauchbarkeit der mitgeteilten Ausgleichsverfahren selbst beurteilen kann.

Angenommen wurde im allgemeinen, daß zur Bestimmung des Neupunktes Richtungsbeobachtungen ausgeführt wurden. Die angegebenen Koordinaten beziehen sich auf das rechtwinklig-sphärische bayerische (Soldnersche) Koordinatensystem ($+x$ Axe nach Nord, $+y$ Axe nach West, Zählung der Direktionswinkel von der $+y$ Axe (bezw. Ordinatenkreis) über Nord, Ost, Süd bis 360°).

---

[3]) Comptes rendus. t. LXXXII 20. März 1876 und Helmert: Zeitschrift für Vermessungswesen VI. Band, S. 53.

[4]) Dr. J. H. Franke. Die Koordinatenausgleichung nach Näherungsmethoden. München 1884.

[5]) Klingatsch. Die graphische Ausgleichung bei der trigonometrischen Punktbestimmung durch Einschneiden. Wien 1894.

[6]) Eine graphische Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen für zwei Unbekannte. Zeitschrift für Vermessungswesen 1895.

[7]) Comptes rendus. t. CXIV vom 13. Juni 1892 oder Hammer, Zeitschrift für Vermessungswesen 1892.

[8]) Beiträge zu graphischen Ausgleichungen. Inauguraldissertation. Zürich 1887.

[9]) Zeitschrift für Vermessungswesen. 1896. S. 611.

[10]) Verfahren zur Ausgleichung von Beobachtungsgrößen auf mechanischem Wege und Anwendung auf Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Zeitschrift für Vermessungswesen. 1899.

I. Abschnitt.

Ausgleichung eines vorwärts eingeschnittenen Punktes.

1. Ableitung der Widersprüche.

Es sind: (x) (y) die Näherungswerte der Koordinaten des zu bestimmenden Punktes

dx, dy deren Verbesserungen um den ausgeglichenen Punkt zu erhalten also

$[x] = (x) + dx$; $[y] = (y) + dy$ die ausgeglichenen Koordinaten.

x, y die bei allen folgenden Ableitungen als fest betrachteten Koordinaten der gegebenen Punkte

φ_q die in bekannter Weise gefundenen beobachteten Direktionswinkel der Strahlen von den gegebenen Punkten nach dem gesuchten Punkte

p_v deren Gewichte ($= \frac{m}{m+1}$ wenn m die Anzahl der zur Ableitung von φ_q benützten festen Richtungen; bezw. $= \frac{n}{2}$ wenn die Ableitung von φ_q aus n Winkelmessungen auf dem gegebenen Punkte zwischen n gegebenen Punkten und dem gesuchten Punkte erfolgte).

(φ) die Direktionswinkel der Strahlen vom Näherungspunkt nach den gegebenen Punkten

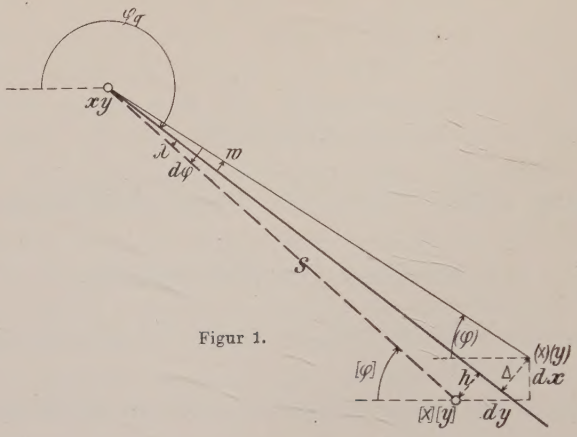
$[\varphi]$ die endgültigen (ausgeglichenen) Direktionswinkel der Strahlen vom endgültigen Punkte nach den gegebenen Punkten.

Dann ist:
$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{x-(x)}{y-(y)}. \tag{1}$$

Wenn sich (x) um dx und (y) um dy ändert dann erhält man durch Differentiation von (1) die Änderung von (φ) zu

$$\left.\begin{aligned} d\varphi'' &= \varrho'' \frac{\sin(\varphi)}{S} dy - \varrho'' \frac{\cos(\varphi)}{S} dx \\ \text{wenn} \quad S &= \frac{x-(x)}{\sin(\varphi)} \overset{\text{oder}}{=} \frac{y-(y)}{\cos(\varphi)} \text{ und } \varrho'' = 206\,265'', \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

In nachstehender Figur 1 entspricht der stark gezogene Strahl der Beobachtung φ_q, λ ist dessen durch die Ausgleichung zu findende Verbesserung.



Figur 1.

Man liest aus der Figur ab:

$$\varphi_q + \lambda = (\varphi) \pm 180^0 + d\varphi . \tag{3}$$

Setzt man hierin:

$$\left.\begin{aligned} w &= (\varphi) - \varphi_q \pm 180^0 \\ \text{und} \qquad \alpha &= \varrho \frac{\sin(\varphi)}{S};\ \beta = -\varrho \frac{\cos(\varphi)}{S} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

dann erhält man die sog. Fehlergleichungen, welchen gleich ihre Gewichte zugesetzt sind, zu

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= w_1 + \alpha_1 dy + \beta_1 dx \quad \text{Gewicht } p_{v1} \\ \lambda_2 &= w_2 + \alpha_2 dy + \beta_2 dx \quad \text{„ } p_{v2} \\ \lambda_3 &= w_3 + \alpha_3 dy + \beta_3 dx \quad \text{„ } p_{v3} \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Der Methode der kleinsten Quadrate gemäß sind die Verbesserungen dx und dy so zu bestimmen, daß $[p_v \lambda \lambda]$ ein Minimum wird. Dies wird erfüllt, wenn

$$\frac{\partial [p_v \lambda \lambda]}{\partial x} = 0 \text{ und } \frac{\partial [p_v \lambda \lambda]}{\partial y} = 0 \text{ oder}$$

$$\left.\begin{aligned} [p_v \alpha \lambda] &= 0 \\ [p_v \beta \lambda] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Da λ stets ein sehr kleiner Winkel ist, so darf hiefür gesetzt werden:

$$\lambda'' = \frac{h}{S} \varrho'' \tag{7}$$

wobei h die aus der Figur ersichtliche Bedeutung hat.

Setzt man (7) in (6) ein, dann erhält man:

$$\left.\begin{aligned} \sin(\varphi_1)\cdot p_{v1}\frac{h_1}{S_1^2}+\sin(\varphi_2)\cdot p_{v2}\frac{h_2}{S_2^2}+\sin(\varphi_3)\cdot p_{v3}\frac{h_3}{S_3^2}+\ldots=0 \\ \cos(\varphi_1)\cdot p_{v1}\frac{h_1}{S_1^2}+\cos(\varphi_2)\cdot p_{v2}\frac{h_2}{S_2^2}+\cos(\varphi_3)\cdot p_{v3}\frac{h_3}{S_3^2}+\ldots=0 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Die einzelnen Summanden dieser zwei Gleichungen stellen die Projektionen der Seiten eines geschlossenen Polygons mit den Strecken $p_{v1}\frac{h_1}{S_1^2}$, $p_{v2}\frac{h_2}{S_2^2}\ldots$ auf die x und y Axe vor. Die Unbekannten h_1, $h_2\ldots$ können auf verschiedene Weise rein mechanisch ermittelt werden, wenn man die Polygonseiten als Kräfte von der Größe $K=p_v\cdot\frac{h}{S^2}$ (9) betrachtet, welche in der Richtung $\varphi\pm 90^0$ auf denselben Punkt einwirken.

2. Aufzeichnung der Schnittstrahlen.

Durch den Näherungspunkt $(x)\,(y)$ legt man das Axenkreuz parallel zu den Koordinatenaxen des Systems. Die von diesem Punkte ausgehenden Strahlen mit den Direktionswinkeln (φ) können auf irgend eine Weise, etwa mit einem Transporteur leicht angegeben werden. Um darnach die beobachteten Strahlen $\varphi_q\pm 180^0$ darzustellen ist zu beachten, daß hierzu nach Gleichung (4) die Näherungsstrahlen (φ) in den äußeren Punkten um die kleinen Winkelgrößen $-w$ zu drehen sind. In der Nähe von $(x)\,(y)$ entspricht dieser kleinen Drehung eine Parallelverschiebung der Näherungsstrahlen um

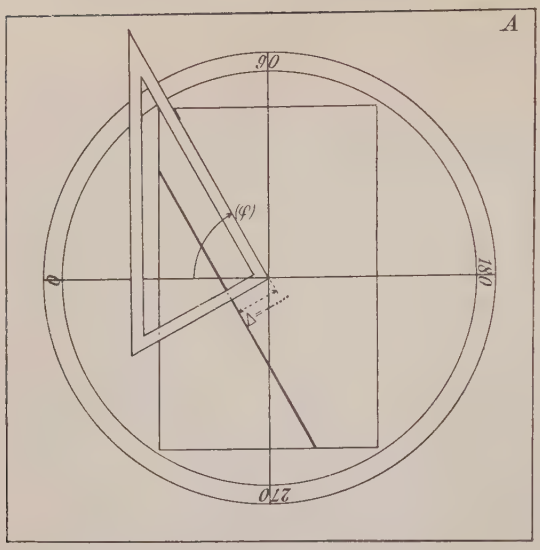
$$\Delta=\frac{w}{\varrho}S\,. \quad (10)$$

Aus Fig. 1 und Gleichung (4) ist ersichtlich, daß zur richtigen Zeichnung des beobachteten Strahles $\varphi_q\pm 180^0$ von dem Punkte $(x)\,(y)$ aus der Betrag Δ in der Richtung

$$(\varphi)\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}90^0 \text{ aufzutragen ist, wenn } w\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\} \text{ wird.}$$

Sämtliche Δ können entweder in natürlicher Größe oder verkleinert abgetragen werden; der Maßstab $\frac{1}{4}$ der natürlichen Größe dürfte auch für große anzustrebende Genauigkeit ausreichen.

Um die Berechnung von Δ aus (10) ganz zu vermeiden (es ist nur dessen linearer Betrag nötig), kann man dasselbe aus einem einfachen Diagramme entnehmen. Aus der beigegebenen Tafel 1, welche für alle vorkommenden Fälle ausreicht, ergibt sich in den auf derselben angegebenen Maßstäben Δ als Zirkelöffnung oder, wenn erwünscht, dessen wirklicher Betrag in Zentimetern.



Figur 2.

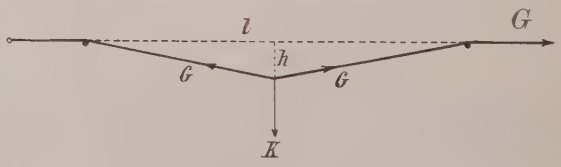
Die praktische Ausführung des Auftrags kann sehr bequem und scharf auf folgende Weise bewirkt werden:

Das Blatt, auf dem der Auftrag gemacht werden soll, wird auf einer Papierscheibe A, auf der eine Teilung von Grad zu Grad auf einem Kreis von 40 cm Durchmesser angebracht ist, befestigt. Hierauf erfolgt die Konstruktion in der in Fig. 2 angedeuteten Weise.

3. Ableitung des mechanischen Ausgleichsverfahrens.

Um den Punkt, welcher der Bedingung (8) genügt, der also unter der gleichzeitigen Einwirkung der Kräfte K seinen Ort nicht verändert, zu finden, denke man sich über jedem gezeichneten Strahle $\varphi_q \pm 180^\circ$ einen Faden mit einer zunächst unbestimmten Kraft G ausgespannt. Die Entfernung der Auflagepunkte des Fadens sei l.

Unter dem Einflusse einer in der Mitte des Fadens angreifenden und senkrecht zum Faden gerichteten Kraft K wird der Faden um h aus seiner ursprünglichen Lage gezogen.



Figur 3.

Für kleine Werte von K im Vergleiche zu G folgt $K = 4\,G \cdot \frac{h}{l}$. (11)

Vereinigt man alle Fäden in ihrer Mitte so, daß jeder Faden in der Richtung $(\varphi) \pm 90^\circ$ auf denselben Punkt Zug (oder Druck) ausübt, so wird sich dieser Punkt solange verändern, bis der Gleichgewichtszustand eingetreten ist, d. h. bis die Summe der Projektionen der Seiten dieses Kräftepolygons auf irgend zwei Axen zu Null wird.

Also auch:

$$\left.\begin{aligned} \frac{h_1}{l_1} G_1 \sin(\varphi_1) + \frac{h_2}{l_2} G_2 \sin(\varphi_2) + \frac{h_3}{l_3} G_3 \sin(\varphi_3) + \ldots = 0 \\ \frac{h_1}{l_1} G_1 \cos(\varphi_1) + \frac{h_2}{l_2} G_2 \cos(\varphi_2) + \frac{h_3}{l_3} G_3 \cos(\varphi_3) + \ldots = 0 \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Die Bedingungen (12) können auf zweierlei Art in die von (8) übergeführt werden und zwar

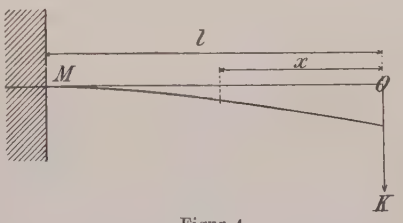
1. durch Wahl von $l = \frac{S^2}{p_v}$ und gleiche Spannung G aller Fäden und
2. durch Wahl von $G = \frac{p_v}{S^2}$ und gleiche Abstände l der Auflagepunkte.

In praktischer Hinsicht ist aber zu bemerken, daß beide Arten (wenigstens in der bei den Versuchen angewandten Form, wobei dünne Drähte und teilweise gefüllte Flaschen entsprechend $\frac{p_v}{S^2}$ benützt wurden) wegen ungünstiger Reibungsverhältnisse nicht genügend scharfe Resultate ergaben und deshalb zu gunsten des folgenden Verfahrens bald wieder verlassen wurden.

Eine andere Art Kräfte von der Größe $\frac{h}{S^2}$ zur Ausgleichung auf mechanischem Wege zu verwenden, wurde meines Wissens öffentlich zum ersten Male von Fischer angegeben[1]). Diese Methode beruht darauf, daß ein an einem Ende fest eingespannter Stab von der Länge l und von überall gleichem Querschnitt durch eine am freien Ende senkrecht zum Stab angreifende Kraft K daselbst um eine Größe $h = K \cdot l^3 \cdot \text{Const.}$ abgebogen wird. Der zur Ausgleichung von Fischer konstruierte Apparat ist a. a. O. beschrieben.

Zu der hiebei benützten Theorie der elastischen Linie möge folgendes bemerkt werden.

Legt man durch O ein Axenkreuz, dessen $+ x$ Axe OM und dessen $+ y$ Axe OK ist, so wird für einen innerhalb der Elastizitätsgrenze durch K beanspruchten Stab, dessen Elastizitätsmodul E und dessen Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ ist, die Differentialgleichung der elastischen Linie



Figur 4.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{K \cdot x}{E \cdot \mathfrak{T}} .$$

[1]) Vgl. Fischer, Verfahren zur Ausgleichung von Beobachtungsgrößen auf mechanischem Wege u. s. w. Zeitschrift f. Verm. Wesen 1899 bezw. dessen Patentschrift Nr. 110 179 Kl. 42, ausgeg. den 8. Mai 1900. Schon in den Jahren 1893/94 habe ich gelegentlich von Ausgleichungen nach dem Dr. Frankeschen graphisch-analytischen Verfahren in der oben angegebenen Weise den endgültigen Punkt mit gespannten Fäden gesucht und habe schon damals federnde Stäbe (Regenschirmstangen) in der weiter unten beschriebenen Weise verwendet; die erwähnte Patentschrift habe ich erst nach Abfassung dieser Arbeit kennen gelernt.

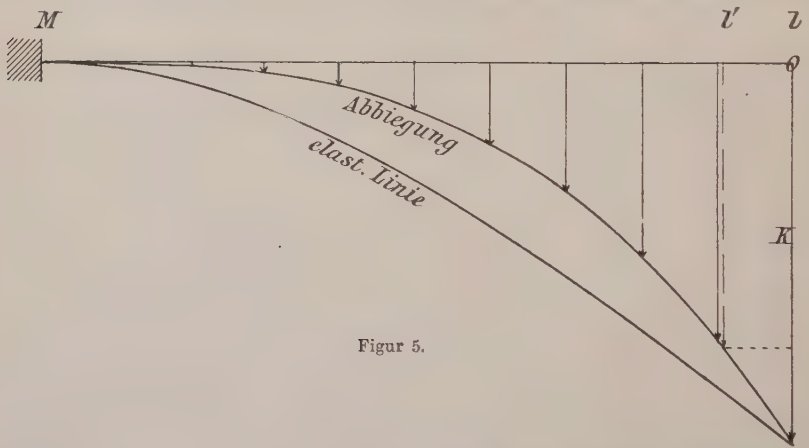
Integriert man diese Gleichung zweimal und bestimmt die auftretenden Konstanten unter Beachtung, daß für $x = l$, $\frac{dy}{dx} = 0$ und nach der zweiten Integration für $x = l$, $y = 0$ wird, so erhält man die Gleichung der elastischen Linie zu:

$$y = \frac{K}{6 \cdot E \cdot \mathfrak{T}} (2\,l^3 - 3\,l^2 x + x^3)\,. \tag{13}$$

Die maximale Abbiegung erhält man demnach für $x = 0$ zu

$$y_{max} = \frac{K}{3\,E \cdot \mathfrak{T}} \cdot l^3\,. \tag{14}$$

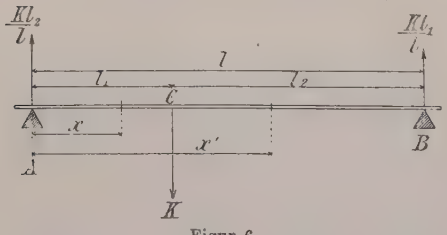
Rechnet man für einen $l = 100$ mm langen Stahldraht von $3\,E \cdot \mathfrak{T} = 1960$ für ein konstantes $K = 0{,}100$ kg zu den Werten von x die zugehörigen y aus (13), sowie die den verschiedenen Werten von l bei diesem konstanten K entsprechenden Abbiegungen aus (14) und trägt diese Werte in einem Koordinatensystem in natürlicher Größe auf, so erhält man die zwei hier dargestellten Kurven (Fig. 5).



Figur 5.

Wenn demnach anfänglich das Moment der bei O angreifenden Kraft $K \cdot l$ ist, so beträgt dieses nach Herstellung des Gleichgewichtes nur noch $K \cdot l'$. Es resultiert demnach eine bedeutend kleinere Abbiegung als der ursprünglich eingestellten Stablänge l entsprechen würde.

Dies kann man vermeiden, wenn man statt des fest eingespannten Stabes einen beiderseits unterstützten Stab zur Ausgleichung verwendet (Fig. 6).



Figur 6.

Für einen solchen im Punkte C durch K beanspruchten Stab wird die Differentialgleichung der elastischen Linie zwischen A und C

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{K l_2}{l \cdot E \cdot \mathfrak{T}} \cdot x$ und zwischen C und B: $\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{K \cdot l_1}{E \cdot \mathfrak{T} \cdot l} \cdot (l - x')$.

Integriert man beide Gleichungen zweimal und bestimmt die auftretenden Konstanten unter Beachtung, daß im Punkte C die Tangenten gemeinschaftlich sind, also $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}$ und daß für $x = o$, $y = o$; für $x = l_1$, $y = y'$ und für $x' = l$, $y' = o$ werden, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{K \cdot l_2 x}{6 E \cdot \mathfrak{T} \cdot l} (l l_1 + l_1 l_2 - x^2) \text{ und} \\ y' &= \frac{K \cdot l_1}{6 E \cdot \mathfrak{T} \cdot l} (l - x') (l_1^2 - 2 l x' + x'^2) . \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Die Biegung bei C wird:

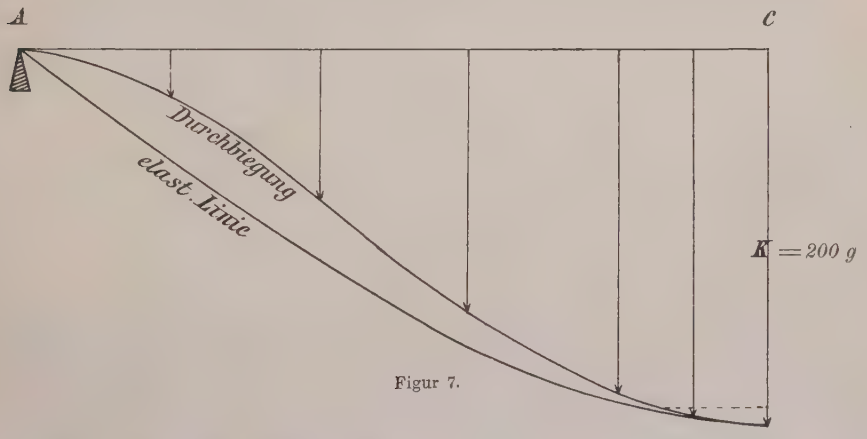
$$y_c = \frac{K \cdot l_1^2 l_2^2}{3 E \cdot \mathfrak{T} l} . \quad (16)$$

Für die Beanspruchung des Stabes in der Mitte zwischen A und B wird

$$y_{max} = \frac{K \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot \mathfrak{T}} . \quad (17)$$

Dieser Wert ist zugleich das absolute Biegungsmaximum, wie aus (15) ersichtlich ist.

Rechnet man für denselben Stab wie vorhin von $l = 200$ mm für die Belastung $K = 0{,}200$ kg in der Mitte aus (15) die elastische Linie und für verschiedene Angriffspunkte von K die Abbiegungen aus (16) bezw. (17) und trägt diese Werte ebenso wie vorhin auf, dann erhält man zwei Kurven, von denen die Hälften hier dargestellt sind (Fig. 7).



Figur 7.

Man ersieht aus diesen Kurven, daß es innerhalb ziemlich weiter Grenzen gleichgültig ist, ob der Stab genau in der Mitte C oder etwas seitwärts davon beansprucht wird; die Durchbiegung bleibt hiebei nahezu konstant. Dieses Ergebnis ist auf die Genauigkeit der im folgenden beschriebenen Ausgleichsmethode von großem Einfluß.

Bringt man an die Stelle der auf Seite 6 verwendet gedachten Fäden elastische Stäbe von an allen Stellen gleichem Querschnitt und

aus gleichem Materiale und bezeichnet den Abstand der Unterstützungspunkte mit l, so wird durch eine in der Mitte des Stabes angreifende und senkrecht zum Stab gerichtete Kraft K gemäß (17) eine Ausbiegung entstehen von

$$h = \frac{K \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot \mathfrak{T}} = K l^3 \cdot \text{Const.}$$

Wenn von der für alle Stäbe gleichen Konstanten abgesehen wird, erhält man

$$K = \frac{h}{l^3}. \qquad (18)$$

Alle Stäbe sollen in ihrer Mitte auf ein und denselben Punkt Druck ausüben; nach Herstellung der Gleichgewichtslage muß dann sein:

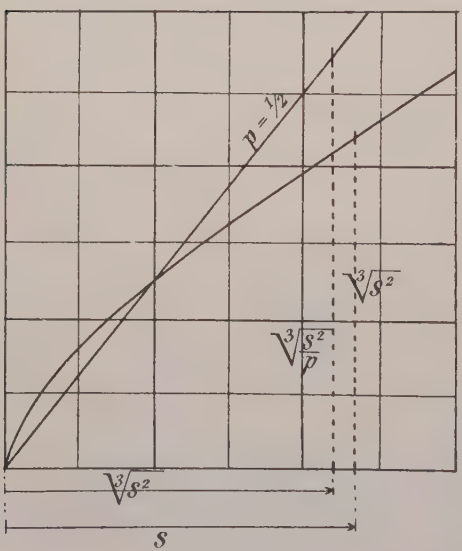
$$\frac{h_1}{l_1^3} \cdot \sin(\varphi_1) + \frac{h_2}{l_2^3} \cdot \sin(\varphi_2) + \frac{h_3}{l_3^3} \sin(\varphi_3) + \ldots = 0$$

$$\frac{h_1}{l_1^3} \cos(\varphi_1) + \frac{h_2}{l_2^3} \cos(\varphi_2) + \frac{h_3}{l_3^3} \cos(\varphi_3) + \ldots = 0 .$$

Der Punkt fällt mit dem durch die Methode der kleinsten Quadrate gefundenen Punkt zusammen, wenn [vgl. mit (8)]:

$$l = \sqrt[5]{\frac{S^2}{p_v}} = \sqrt[3]{S^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{p_v}} \qquad (19)$$

Um die Rechnung der einzustellenden Stablängen l aus (19) zu ersparen, wurden in dem auf Tafel 2 dargestellten Diagramm die zu S gehörigen Werte $l = \sqrt[3]{S^2}$ aufgetragen; diese Werte entsprechen demnach der Gleichung (19) für $p_v = 1$.



Figur 8.

Für andere Werte von p_v entnimmt man nach Anleitung nebiger Figur 8 den Betrag $\frac{\sqrt[3]{S^2}}{\sqrt[3]{p}}$ dem Diagramm 2.

Bei der praktischen Ausführung dieser Ausgleichsmethode wurden als elastische Stäbe leidlich gerade gebogene etwa 0,4 m lange Stücke von stählernen Klaviersaiten von 1,0 mm Durchmesser, welche von derselben Rolle abgezwickt waren, verwendet. Als Auflagepunkte dienten zum Teile zwei im Abstande von 2 mm mit ihren stumpfen Enden zusammengelötete Nähnadeln, zum Teile auch mit zwei Spitzen im Abstande von 2 mm versehene Reiß-

nägel, welche einfach in die Zeichnenunterlage im Abstande l vom Näherungspunkt auf den gezeichneten Strahlen eingesteckt wurden. Der Punkt, welcher die Drucke aller einzelnen Stäbe aufzunehmen hatte, wurde durch eine stählerne Stecknadel gebildet, welche etwa bis zur Hälfte in ein kleines hölzernes Stäbchen eingedrückt war.

4. Ausgleichung des vorwärts eingeschnittenen Punktes, Bestimmung dessen Koordinaten und der endgültigen Direktionswinkel.

Nach Beendigung des Auftrages der Schnittfigur in irgend einem gewählten Maßstabe wird innerhalb dieser schätzungsweise ein Näherungspunkt angenommen. Auf gute Annahme dieses Punktes kommt es nach dem Angeführten nicht sehr an. Hierauf werden die Längen l bezw. $\frac{l}{2}$ unter Berücksichtigung der Gewichte p_v dem Diagramm 2 entnommen, die entsprechenden Auflagepunkte auf den gezeichneten Strahlen angemerkt und die einzelnen Stäbe durch Einstecken der Nadeln an diesen Punkten fixiert. Sodann schiebt man die Stecknadel so zwischen die einzelnen Stäbe, daß jeder dieser auf erstere Druck ausübt und bezeichnet den Punkt, an welchem die Nadel hingeschoben wird, womit die Ausgleichung beendigt ist. Die Abstände dieses Punktes von dem durch den Näherungsort $(x)\,(y)$ gelegten Axenkreuz (vgl. Fig. 1) geben (im gewählten Maßstabe) die Verbesserungen dy bezw. dx der Koordinaten des Näherungspunktes, so daß dessen endgültige Koordinaten sind:

$$\left\{\begin{array}{l} [x] = (x) + dx \\ [y] = (y) + dy \end{array}\right\} \qquad (19a)$$

Die Direktionswinkel der Strahlen vom ausgeglichenen Punkte nach den äußern Punkten ergeben sich durch

$$[\varphi] = \varphi_z \pm 180 + \lambda\odot \qquad (19b)$$

wobei gemäß Gleichung (7): $\lambda''\odot = \frac{h}{S} \cdot \varrho''$.

h ist hiebei $\left\{\begin{array}{l}+\\-\end{array}\right\}$ je nachdem der ausgeglichene Punkt vom äußern Punkt aus gesehen $\left\{\begin{array}{l}\text{rechts}\\\text{links}\end{array}\right\}$ vom beobachteten Strahle liegt. Die Bestimmung von $\lambda\odot$ erfolgt wieder im Diagramm 1.

Zur Probe kann man $[\varphi] = \text{arctg}\,\frac{x-[x]}{y-[y]}$ berechnen. (19c)

Je nach der Länge S der Visierstrahlen werden, wenn dx und dy auf ganze Zentimeter abgerundet wurden, die aus (19b) und (19c) gefundenen Werte verschieden stark abweichen.

Die Zeitdauer für den Auftrag der Strahlen, die mechanische Ausgleichung und Berechnung der endgültigen Direktionswinkel nach (19b) wird für vier Strahlen bei etwas Übung ungefähr 10 Minuten betragen.

5. Ausgleichung des vorwärts eingeschnittenen Punktes I.

Aus den zwei sich unter günstigem Winkel schneidenden Strahlen 1 und 4 (vergl. die Fig. 12, Seite 42) ergaben sich durch eine Dreiecksberechnung die vorläufigen (genäherten) sphärischen Koordinaten des gesuchten Punktes I zu $(x) = -61\,805{,}40$, $(y) = -44\,850{,}41$.

Auf den äußeren Punkten 1, 2, 3, 4 und 5 wurden Richtungsbeobachtungen ausgeführt so, daß die Ableitung der Direktionswinkel φ_q aus 6, 5, 5, 8 und 7 bekannten Richtungen erfolgen konnte. Die hiedurch bedingten Gewichte $p_v = {}^6/_7,\ {}^5/_6,\ {}^5/_6,\ {}^8/_9$ und ${}^7/_8$ der Beobachtungen φ_q wurden dann weiterhin auf die Einheit aufgerundet.

Aus den Soldnerschen Koordinatenformeln im bayerischen Systeme für die Berechnung der Koordinaten von Punkt 2 aus denen von 1 und zur Ermittlung der Direktionswinkel $\varphi_{2.1}$ aus $\varphi_{1.2}$:

$$x_2 = x_1 + \Delta_x + ⓧ \text{ wobei } \Delta_x = S \sin \varphi_{1.2} \text{ und } ⓧ = \frac{\Delta_x}{2R^2}\, y_2{}^2 - \frac{\Delta_x\, \Delta_y{}^2}{6R^2}$$

$$y_2 = y_1 + \Delta_y + ⓨ \qquad \Delta_y = S \cos \varphi_{1.2} \qquad ⓨ = -\frac{\Delta x^2}{2R^2}\left(y_1 + \frac{\Delta_y}{3}\right)$$

$$\varphi_{2.1} = \varphi_{1.2} \pm 180^0 + ⓟ \qquad \log R = 6.8054 \qquad ⓟ = \frac{\varrho''\, \Delta_x}{R^2}\left(y_1 + \frac{\Delta_y}{2}\right)$$

folgt durch Umkehrung, daß die Direktionswinkel von (x) (y) nach den äußeren Punkten x y sich ergeben aus $\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{x - (x) - ⓧ}{y - (y) - ⓨ}$ wobei in den obigen Formeln für die sphärischen Ergänzungen

$$\Delta_x = x - (x)$$
$$\Delta_y = y - (y)$$
$$y_1 = (y)$$
$$y_2 = y$$

zu setzen ist.

Um den Wert (φ) mit φ_q vergleichen zu können, muß φ_q (welches obigem $\varphi_{2.1}$ entspricht) zuvor noch um $-$ ⓟ verbessert werden. Die sphärischen Ergänzungen wurden bei allen folgenden Berechnungen nur bis auf ganze Zentimeter berücksichtigt (für die Ausgleichung selbst sind dieselben gleichgültig).

Die Rechnung und Ausgleichung ist aus der folgenden Tabelle und aus der Figur 12 (Seite 42) ersichtlich, wobei noch bemerkt wird, daß die zur Bestimmung der letzten Zeile notwendigen Zahlen $x - [x]$, $y - [y]$ u. s. f. mit kleinen Zahlen in den Zeilen 3, 4, 5, 7 und 8 enthalten sind.

Die Aufzeichnung der Strahlen für alle in dieser Arbeit ausgeführten Ausgleichungen erfolgte im Maßstab ${}^1/_4$; für den Druck wurden die Figuren 12 bis 16 im Verhältnis 8 : 10 verkleinert.

Punkt I.

$(x) = -\ 61\,805{,}40 \qquad (y) = -\ 44\,850{,}41$

$dx = -\ 0{,}00 \qquad dy = -\ 0{,}04$

$[x] = -\ 61\,805{,}40 \qquad [y] = -\ 44\,850{,}45$

Punkte	1	2	3	4	5	6	λ	$p\lambda\lambda$
$x =$	— 61 356,69	— 60 880,18	— 60 933,66	— 60 783,43	— 61 234,91		3,8	14,4
$y =$	— 44 091,24	— 44 314,53	— 44 781,55	— 45 266,01	— 45 814,66		1,3	1,7
$x - (x) =$	+ 448,71	+ 925,22	+ 871,74	+ 1 021,97	+ 570,49		6,4	41,0
$\textcircled{x} =$	+ 1	+ 2	+ 2	+ 2	+ 1			
	21	92	90	56	21			
$y - (y) =$	+ 759,17	+ 535,88	+ 68,86	— 415,60	— 964,25		7,1	50,4
$\textcircled{y} =$	0	0	0	0	0			
$l(\Delta_x - \textcircled{x}) =$	2. 65 19 56	2. 96 62 36	2. 94 03 77	3. 00 94 29	2. 75 62 40		0,2	0,0
$lE\left\{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\right\}(\varphi) =$	0. 06 50 6	0. 06 28 2	0. 00 13 5	0. 03 32 3	0. 06 51 7			107,5
	62	1 00	82 19	34	72		$m = \sqrt{\frac{107{,}5}{3}} =$	
$l(\Delta_y - \textcircled{y}) =$	2. 88 03 39	2. 72 90 68	1. 83 79 67	2. 61 86 76 n	2. 98 41 90 n		$= \pm 5{,}97$	
	5 94	1 36	1 58	95	68			
$l\,\mathrm{tg}(\varphi) =$	9. 77 16 17	0. 23 71 68	1. 24 10	0. 39 07 53 n	9. 77 20 50 n		$m_x = \pm 0{,}021$	
							$m_y = \pm 0{,}016$	
$l\,S =$	2. 94 540	3. 02 90 6	2. 94 173	3. 04 266	3. 04 936			
$S =$	882	1069	874	1103	1120			
$(\varphi) =$	30° 35′ 06″*	59° 55′ 13″	85° 29′ 00″	112° 07′ 49″	149° 23′ 25″			
$\gamma =$	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .			
$(\varphi) - \gamma =$	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .			
$\varphi_q - \textcircled{\varphi} - \gamma =$	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .		$(\varphi_0) =$.	
$c = (\varphi_0) + \gamma =$	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .			
$\varphi_q - \textcircled{\varphi} =$	210 35 06	239 55 06	265 28 45	292 07 49	329 23 21			
$\textcircled{\varphi} =$	— 0,1	— 0,2	— 0,2	— 0,3	— 0,2			
$w = (\varphi) - c =$	0	+ 7	+ 15	0	+ 4			
$p =$	(6/7) = 1	(5/6) = 1	(5/6) = 1	(8/9) = 1	(7/8) = 1			
$\lambda\odot =$	— 3,8	+ 1,3	+ 6,4	— 7,1	— 0,2		$z = - \cdot 0$.	
$(\varphi) = c + \lambda\odot =$	30 35 02	59 55 07	85 28 51	112 07 42	149 23 21			
$[\varphi] = \mathrm{arctg}\,\frac{x - [x]}{y - [y]}$	30 35 00	59 55 07	85 28 51	112 07 42	149 23 21			

*) Der zur Ableitung der vorläufigen Koordinaten benützte Wert (6″) wurde beibehalten.

II. Abschnitt.

Ausgleichung eines rückwärts eingeschnittenen Punktes.

6. Ableitung der Widersprüche und der Bedingungsgleichungen für den ausgleichenden Punkt.

Auf dem gesuchten Punkte $[x]\,[y]$ wurden die Richtungen γ_1, γ_2, $\gamma_3 \ldots$ nach den gegebenen Punkten 1, 2, 3 . . . gemessen. Ist $[\varphi_o]$ der Direktionswinkel der Nullrichtung des Satzes, so sind die beobachteten Direktionswinkel der Strahlen vom Punkte $[x]\,[y]$ nach den Punkten 1, 2, 3 . . .

$$[\varphi_o]+\gamma_1,\ [\varphi_o]+\gamma_2,\ [\varphi_o]+\gamma_3 \ldots \tag{20}$$

Die vom Näherungsort $(x)\,(y)$ nach 1, 2, 3 . . . gehenden Strahlen haben die aus Gleichung (1) folgenden (genäherten) Direktionswinkel (φ_1), (φ_2), (φ_3) . . . und es wird aus Gleichung (3) indem $[\varphi_o]+\gamma-180^0$ an die Stelle von φ_a tritt:

$$[\varphi_o]+\gamma+\lambda=(\varphi)+d\varphi\,. \tag{21}$$

Da die Orientierung $[\varphi_o]$ des Satzes nicht genau bekannt ist, setzt man

$$[\varphi_o]=(\varphi_o)+z \tag{22}$$

und wenn noch zur Abkürzung

$$w=(\varphi)-((\varphi_o)+\gamma) \tag{23}$$

genommen wird, so erhält man die Fehlergleichungen

$$\left.\begin{array}{llll} \lambda_1=w_1-z+\alpha_1 dy+\beta_1 dx & \text{Gewicht} & p_1 \\ \lambda_2=w_2-z+\alpha_2 dy+\beta_2 dx & \text{„} & p_2 \\ \lambda_3=w_3-z+\alpha_3 dy+\beta_3 dx & \text{„} & p_3 \\ \vdots \quad \vdots \qquad \ldots \qquad . & & \end{array}\right\} \tag{24}$$

Die Gewichte p dieser Fehlergleichungen werden meistens unter sich gleich und gleich der Einheit sein, wenn das Gewicht einer beobachteten Richtung (bezw. des Mittels) $= 1$ gesetzt wird.

Da der Methode der kleinsten Quadrate zufolge die Unbekannten z, dy und dx so zu bestimmen sind, daß $[p\lambda\lambda]$ ein Minimum wird, muß sein:

$$\frac{\partial\,[p\,\lambda\,\lambda]}{z}=o,\ \frac{\partial\,[p\,\lambda\,\lambda]}{\partial y}=o \text{ und } \frac{\partial\,[p\,\lambda\,\lambda]}{\partial x}=o$$

oder ausgeführt:

$$\left.\begin{array}{l} -[p\lambda]\ =O=[p]z-[p\alpha]dy-[p\beta]dx-[pw] \\ [p\alpha\lambda]=O=-[p\alpha]z+[p\alpha\alpha]dy+[p\alpha\beta]dx+[p\alpha w] \\ [p\beta\lambda)=O=-[p\beta]z+[p\alpha\beta]dy+[p\beta\beta]dx+[p\beta w] \end{array}\right\} \tag{25}$$

Da λ ein sehr kleiner Winkel ist, darf wieder gesetzt werden

$$\lambda'' = \frac{h}{S} \cdot \varrho''$$

und damit werden die drei Bedingungsgleichungen (25), welche der ausgeglichene Punkt erfüllen muß,

$$\left[p \cdot \frac{h}{S}\right] = 0$$

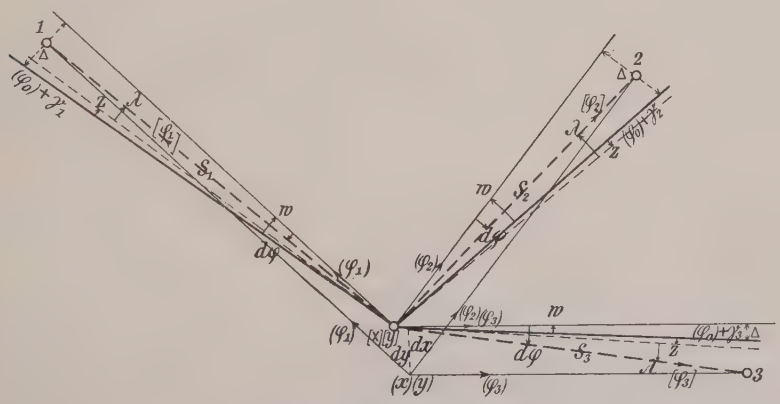
$$\left[\sin(\varphi) \cdot \frac{p \cdot h}{S^2}\right] = 0 \qquad (25a)$$

$$\left[\cos(\varphi) \cdot \frac{p \cdot h}{S^2}\right] = 0 .$$

Zu den zwei letzten Gleichungen von früher kommt wegen der dritten Unbekannten z noch die erste Gleichung neu hinzu.

7. Graphische Darstellung der Beobachtungen.

In Figur 9 sind zunächst die vorher behandelten Verhältnisse schematisch dargestellt; die stark gezogenen Strahlen $(\varphi_0) + \gamma_1$, $(\varphi_0) + \gamma_2$, . . . entsprechen den auf dem endgültigen Punkt $[x]$ $[y]$ beobachteten Richtungen des Satzes.



Figur 9.

Da einige von mir konstruierte Apparate, welche darauf beruhten, daß der, entweder durch starre oder durch elastische Stäbe verkörperte, beobachtete Satz $(\varphi_0) + \gamma$ zwischen die durch Nadeln bezeichneten festen Punkte 1, 2 . . unter Anwendung entsprechender Kräfte bei diesen Punkten nach Andeutung der Figur eingeschoben werden konnte, den endgültigen Punkt nicht mit befriedigender Schärfe lieferten, wurde dieser Weg wieder verlassen und in der Nähe von (x) (y), ähnlich wie beim Vorwärtseinschneiden, die den Punkt bestimmenden beobachteten Strahlen $(\varphi_0) + \gamma$ aufgezeichnet. Da hiebei die beobachteten Strahlen durch die äußeren Punkte hindurchgehen müssen,

so erfahren die Strahlen (φ) bei dem Punkte (x) (y) eine Parallelverschiebung Δ, welche dem kleinen Winkel w der Figur entspricht. Die Größe von Δ ist demnach gegeben durch:

$$\Delta = \frac{w''}{\varrho''} S$$

Vom Punkte (x) (y) aus ist Δ in der Richtung (φ) $\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$ 90° aufzutragen, wenn w $\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$ ausfällt.

Wie ersichtlich, sind die Formeln dieselben wie beim Vorwärtseinschneiden, weshalb der Auftrag auch in der dort angegebenen Weise zu machen ist.

8. Ableitung des Ausgleichsverfahrens.

Eine direkte mechanische Lösung der Gleichungen (25 a), welche den ausgeglichenen Punkt mit befriedigender Schärfe ergibt, konnte, wie schon angedeutet, nicht gefunden werden. Die unten angegebenen indirekten Lösungen beruhen auf folgendem:

Betrachtet man in den Normalgleichungen (25) die zu ermittelnden Größen z, dy und dx als die räumlichen rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes, so ist dieser der Schnittpunkt dreier Ebenen, denn jede der drei Gleichungen (25) stellt in dieser Auffassung eine Ebene vor. Setzt man sämtliche Gewichte $p = 1$ und sind n Fehlergleichungen vorhanden, so betragen die Abschnitte dieser Ebenen auf der z, y und x Axe

$$\left.\begin{matrix} \frac{[w]}{n}, & -\frac{[w]}{[\alpha]}, & -\frac{[w]}{[\beta]} \\ \frac{[\alpha w]}{[\alpha]}, & -\frac{[\alpha w]}{[\alpha\alpha]}, & -\frac{[\alpha w]}{[\alpha\beta]} \\ \frac{[\beta w]}{[\beta]}, & -\frac{[\beta w]}{[\alpha\beta]}, & -\frac{[\beta w]}{[\beta\beta]} \end{matrix}\right\} \qquad (25\,b)$$

Bei Beibehaltung verschiedener Gewichte p ist in der Folge für $n = [p]$ und in jeder Summe p vorzusetzen.

Schneidet man diese drei Ebenen durch eine im Abstande z zur xyEbene parallele Ebene, so ist der Schnittpunkt der beiden Spuren der zwei letzten Ebenen von (25) in dieser parallelen Ebene der gesuchte Punkt.

Wenn nun für $[\varphi_0]$ bereits ein guter Näherungswert (φ_0) bekannt ist, dann wird z nur noch sehr klein sein, und der Schnittpunkt der Spuren der beiden (zur z Axe parallelen) Ebenen

$$[\alpha\alpha]\,dy + [\alpha\beta]\,dx + [\alpha w] = 0$$
$$[\alpha\beta]\,dy + [\beta\beta]\,dx + [\beta w] = 0$$

wird von der Projektion des vorigen endgültigen Punktes auf die

xy Ebene nur mehr wenig abweichen. Den ersteren Punkt liefert nach früher die mechanische Ausgleichung der Strahlen $(\varphi_0) + \gamma$.

Die gleich ins Winkelmaß umgerechneten Abstände dieses Näherungspunktes (1) von den Strahlen $(\varphi_0) + \gamma$ entsprechen gemäß Gleichung (24) den Werten $\lambda_{(1)} = \lambda + (z)$. Wenn der Satz richtig orientiert ist ($(z) = 0$) stellt Punkt (1) den endgültigen Punkt vor, so daß nach (25) dann sein muß $[\lambda + (z)] = 0$.

Trifft diese Bedingung nicht zu, dann darf der ersten Normalgleichung (25) zufolge genähert gesetzt werden:

$$(z) = \frac{[\lambda + (z)]}{n}. \qquad (26)$$

Mit diesem Werte von (z) könnte dann der Satz durch $(\varphi_0) + (z)$ schärfer orientiert, hierauf ein zweiter Näherungspunkt gefunden werden u. s. f.

Solche mehrfache Wiederholungen der Ausgleichung wären umständlich und würden die praktische Brauchbarkeit des Verfahrens in Frage stellen. Es wird sich unten zeigen, daß unter gewissen Bedingungen, welche sehr oft nahezu erfüllt sind, eine einzige Ausgleichung zum Ziele führt, stets werden aber zwei genügen.

Zunächst soll aber angenommen werden für (z) ergibt sich aus (26) noch ein zu berücksichtigender Betrag. Dann empfiehlt es sich den Satz nicht nur um (z) zu drehen, sondern gleich um eine runde Größe

$$z_1 = k \cdot (z), \text{ wobei } k = 3 \text{ bis } 5, \qquad (27)$$

damit die oben erwähnte Schnittebene auf die andere Seite vom endgültigen Punkt zu liegen kommt als vorher.

Durch diese Neuorientierung erleiden alle Strahlen im gleichen Sinne wie z_1 eine Drehung um die äußeren Punkte; in der Nähe von (x) (y) also eine Parallelverschiebung um

$$\frac{z_1}{\varrho} S.$$

Diese Parallelverschiebung kann sehr rasch mit dem Diagramme 1 ausgeführt werden, wobei es durchaus **nicht** notwendig ist, die Strahlen **zu zeichnen.** Nach der hierauf folgenden **zweiten mechanischen Ausgleichung** erfolgt von dem erhaltenen Punkte (2) aus wie vorhin die Bestimmung von

$$(z') = \frac{[\lambda + (z')]}{n} \qquad (28)$$

was am besten von den aufgetragenen Strahlen aus mit Berücksichtigung von z_1 geschieht.

Man hat nun zwei um a entfernte ausgleichende Punkte (1) und (2); dem ersten entspricht ein Funktionswert (z) dem zweiten (z'). Der

endgültige Punkt, welcher $(z'') = 0$ entspricht und vom ersten auf der Verbindungslinie von (1) und (2) um e entfernt ist, ergibt sich dann mit der *regula falsi* durch:

$$e = a \frac{(z)}{(z) - (z')} . \tag{29}$$

Die Koordinaten dieses Punkts in bezug auf das Axenkreuz durch (x) (y) entsprechen den gesuchten Größen dx und dy; durch Anwendung derselben Regel wie vorher ergibt sich dann die endgültige Orientierung des Satzes zu

$$z = z_1 \frac{e}{a} . \tag{30}$$

9. Bestimmung guter Näherungswerte für $[\varphi_0]$ und der endgültigen Direktionswinkel.

Wie aus den vorigen Darlegungen hervorgeht, hängt die Schnelligkeit der mechanischen Ausgleichung zum großen Teile von der guten Orientierung des Satzes ab. Diese kann man sich auf zweierlei Arten verschaffen.

a) Die einzelnen Strahlen sind nahezu gleich lang $\left(\text{etwa } \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \text{ bis } {}^1/_2\right)$. Unter der Voraussetzung, daß die Näherungskoordinaten nicht sehr bedeutend von denjenigen des ausgeglichenen Punktes abweichen, kann der Satz, hauptsächlich wenn die n Strahlen über den Horizont gleichmäßig verteilt sind, genähert orientiert werden durch

$$(\varphi_0) = \frac{[(\varphi) - \gamma]}{n} . \tag{31}$$

Liegt der Punkt in der Mitte zwischen zwei gegebenen Punkten, dann wird, wie leicht ersichtlich, durch diese Formel jeweils aus den zwei betreffenden Direktionswinkeln der Strahlen (φ_0) am schärfsten an $[\varphi_0]$ erhalten.

Setzt man den Wert von (φ_0) aus (31) in Gleichung (23) ein, zeichnet nach Absatz 7 die Beobachtungen auf und gleicht diese nach Absatz 8 mechanisch aus, dann entspricht zunächst ohne Rücksicht auf (26) der erhaltene Punkt sogleich dem methodisch ausgeglichenen:

1. wenn $[\alpha]$ und $[\beta]$ gleichzeitig zu Null werden,
2. wenn der ausgeglichene Punkt auf (x) (y) fällt und
3. wenn die Orientierung nach (31) den richtigen Betrag ergeben hat, also $z = 0$ wird.

Zu 1. Aus den Gleichungen (31) und (23) folgt $[w] = 0$, so daß der Abschnitt der ersten Ebene von (25b) auf der z Axe zu Null wird. Die beiden andern Schnittebenen von (25b) sind, da die Abschnitte auf der z Axe ∞ groß werden, zu dieser Axe parallel, so daß der Schnittpunkt ihrer beiden Spuren in der xy Ebene den

methodisch ausgeglichenen Punkt vorstellt, welcher auch durch die mechanische Ausgleichung gefunden wurde.

Zu 2. Fällt der mechanisch ausgeglichene Punkt auf den Näherungspunkt, dann entsprechen die Werte w aus (23) und (31), wie auch aus der Figur 9 ersichtlich ist, sogleich den Größen λ. (Orientierung eines Satzes zwischen festen Richtungen).

Zu 3. Wenn $z = 0$ wird, dann folgt aus den Gleichungen (25), daß lediglich der Fall der Ausgleichung beim Vorwärtseinschneiden vorliegt.

Ob Fall 1 oder 3 zutrifft ersieht man nach der Berechnung von Gleichung (26). Dem Nullwert von (z) entspricht 1 oder 3, im gegenteiligen Falle ist zur Erreichung möglichst scharfer Resultate nach den Formeln (26) bis (30) zu verfahren.

b) Die einzelnen Strahlen haben sehr verschiedene Länge $\left(\text{etwa } \frac{S_{\text{min.}}}{S_{\text{max.}}} > \frac{1}{2}\right)$. Wenn die Strahlen sehr ungleich lang sind, kann man im allgemeinen unter Beachtung des Folgenden den Satz besser als vorher nach (31) orientieren. Der Näherungspunkt möge in jeder Richtung senkrecht zu den einzelnen Strahlen sich um $\pm s$ verschieben, dann ändert sich der Direktionswinkel (φ) nach dem äußern Punkt um $d\varphi = \pm \frac{s}{S} \varrho$, so daß $(\varphi) + d\varphi - \gamma = (\varphi_0)$ den Direktionswinkel der Nullrichtung ergibt. Betrachtet man $d\varphi$ als mittleren Fehler von (φ), dann kommt demnach jeder einzelnen Bestimmung von (φ_0) ein Gewicht $p = S^2$ zu und man erhält deshalb die Orientierung des Satzes durch das allgemeine arithmetische Mittel zu

$$(\varphi_0) = \frac{[S^2 . ((\varphi) - \gamma)]}{[S^2]}. \tag{32}$$

Aus (32) ersieht man, daß den kurzen Strahlen bei der Verwendung zur Orientierung des Satzes ein sehr kleines Gewicht zukommt. Praktisch genügt es im allgemeinen, die einzelnen Gewichte in ganzen Einheiten anzusetzen. (S in km.)

Dieser Wert von (φ_0) aus (32) ist in (23) einzusetzen und nach Absatz 8 weiter zu verfahren.

Nachdem der ausgeglichene Punkt ⊙ gefunden ist, erfolgt die Bestimmung der endgültigen Direktionswinkel $[\varphi]$ der Strahlen von diesem nach den äußeren Punkten. Gemäß Fig. 9 entsprechen die Abstände h des endgültigen Punktes von den beobachteten (aufgezeichneten) Strahlen $(\varphi_0) + \gamma$ den Winkelwerten $\lambda_\odot = \lambda + z$, (33a)

so daß $$[\varphi] = (\varphi) + \gamma + \lambda_\odot \tag{33b}$$

wobei $$\lambda''_\odot = \frac{h}{S} \cdot \varrho''. \tag{34}$$

h ist hiebei wieder $\begin{cases}+\\-\end{cases}$ je nachdem, vom äußern Punkt aus gesehen, der ausgeglichene Punkt $\odot$ $\begin{cases}\text{rechts}\\\text{links}\end{cases}$ vom beobachteten Strahle liegt.

Wegen (25) folgt auch: $z = \frac{[\lambda \odot]}{n}$. (35)

10. Ausgleichung des rückwärts eingeschnittenen Punktes II.

Nach Ableitung der Winkel (φ) erfolgte die Orientierung des Satzes durch Formel (32) zu

$$(\varphi_0) = 49^0\,47'\,40'' + \frac{4 \,.\, 4{,}2 + 4 \,.\, 13{,}3 + 60 \,.\, 17{,}3 + 1 \,.\, 6{,}8 + 3 \,.\, 10{,}1 - 0{,}5 \,.\, 5{,}5}{4 + 4 + 60 + 1 + 3 + 0{,}5} =$$

$$= 49^0\,47'\,56''{,}1,$$

worauf $c = (\varphi_0) + \gamma$ und $w = (\varphi) - c$ berechnet wurden.

Der sodann folgende Auftrag der Strahlen ist auf Figur 13 (Seite 43) enthalten. Die erste mechanische Ausgleichung liefert den Punkt (1), die von da aus abgemessenen $\lambda_{(1)}$ geben nach (26) $(z) = +\,0''{,}1$, so daß eine zweite Ausgleichung nicht notwendig ist. Die Koordinatenverbesserungen sind in der folgenden Tabelle und auf Figur 13 angegeben, die endgültigen Direktionswinkel wurden nach (33b) und zur Kontrolle nach (19c) berechnet.

Punkt II.

$(x) =$	$-\ 61\,234{,}91$	$(y) =$	$-\ 45\,814{,}66$
$dx =$	$-\ 0{,}07$	$dy =$	$+\ 0{,}03$
$[x] =$	$-\ 61\,234{,}98$	$[y] =$	$-\ 45\,814{,}63$

Punkte	1	2	3	4	5	6	λ	$p\lambda\lambda$
$x =$	$-\ 59\,692{,}06$	$-\ 59\,264{,}05$	$-\ 54\,067{,}38$	$-\ 61\,805{,}40$	$-\ 61\,356{,}69$	$-\ 60\,783{,}43$	$-\ 4{,}8$	23,0
$y =$	$-\ 44\,510{,}68$	$-\ 45\,644{,}53$	$-\ 48\,165{,}75$	$-\ 44\,850{,}45$	$-\ 44\,091{,}24$	$-\ 45\,266{,}01$	$+\ 0{,}9$	0,8
$x-(x) =$	$^{92}+\ 1\,542{,}85$	$^{93}+\ 1\,970{,}86$	$^{60}+\ 7\,167{,}53$	$^{42}-\ 570{,}49$	$^{71}-\ 121{,}78$	$^{55}+\ 451{,}48$	$+\ 1{,}4$	2,0
$\textcircled{x} =$	$+\ 4$	$+\ 5$	$+\ 20$	$-\ 1$	$-\ 0$	$+\ 1$		
$y-(y) =$	$^{95}+\ 1\,303{,}98$	$^{10}+\ 170{,}13$	$^{12}-\ 2\,351{,}09$	$^{18}+\ 964{,}21$	$^{39}+\ 1\,723{,}42$	$^{62}+\ 548{,}65$	$-\ 0{,}6$	0,4
$\textcircled{y} =$	$+\ 0$	$+\ 0$	$+\ 3$	$+\ 0$	$+\ 0$	$+\ 0$		
$l\,(\Delta_x-\textcircled{x}) =$	$^{32}3.\ 18\ 83\ 13$	$^{61}3.\ 29\ 46\ 45$	$^{62}3.\ 85\ 53\ 58$	$^{1\ 87}2.\ 75\ 62\ 40_n$	$^{3\ 26}2.\ 08\ 55\ 76_n$	$^{96}2.\ 65\ 46\ 29$	$+\ 2{,}4$	5,8
$l\,E\,\frac{\sin}{\cos}\,(\varphi) =$	0. 11 705	0. 00 161	0. 02 219	0. 06 518	0. 00 108	0. 11 229	$+\ 0{,}9$	0,8
$l\,(\Delta_y-\textcircled{y}) =$	$^{61}3.\ 11\ 52\ 71$	$^{04}2.\ 23\ 07\ 81$	$^{81}3.\ 37\ 12\ 75_n$	$^{58}2.\ 98\ 41\ 72$	$^{84}3.\ 23\ 63\ 91$	$^{72}2.\ 73\ 92\ 95$		32,8
$l\,\mathrm{tg}\,(\varphi) =$	$^{71}0.\ 07\ 30\ 42$	$^{9\ 57}1.\ 06\ 38\ 64$	$^{1}0.\ 48\ 40\ 83_n$	$^{29}9.\ 77\ 20\ 68_n$	$^{89\ 42}8.\ 84\ 91\ 85_n$	$^{4\ 24}9.\ 91\ 53\ 34$	$m=\sqrt{\frac{32{,}8}{6-3}}=$	$=\pm 3{,}31''$
$l\,S =$	3. 30 536	3. 29 625	3. 87 756	3. 04 935	3. 23 747	2. 85 158	$m_x=\pm 0{,}012$	
$S =$	2020	1978	7543	1120	1728	710	$m_y=\pm 0{,}015$	
$(\varphi) =$	49 47 44,2	85 03 58,3	108 09 40,3	329 23 20,8	355 57 29,1	39 27 00,5		
$\gamma =$	0 0 0	35 16 05	58 21 43	279 35 34	306 09 39	349 39 26		
$(\varphi)-\gamma =$	49 47 44,2	47 53,3	47 57,3	47 46,8	47 50,1	47 34,5		
$\varphi_q-\textcircled{\varphi}-\gamma =$	.	.	.	.	.	.	$(\varphi_0)=56''{,}1$	
$c=\frac{\varphi_q-\textcircled{\varphi}=}{l(\varphi_0)+\gamma=}$	49 47 56,1	85 04 01,1	108 09 39,1	329 23 30,1	355 57 35,1	39 27 22,1		
$\textcircled{\varphi} =$	.	.	.	.	.	.		
$w=(\varphi)-c =$	$-\ 11{,}9$	$-\ 2{,}8$	$+\ 1{,}2$	$-\ 9{,}3$	$-\ 6{,}0$	$-\ 21{,}6$		
$p =$	1	1	1	1	1	1		
$\lambda\odot =$	$-\ 4{,}7$	$+\ 1{,}0$	$+\ 1{,}5$	$-\ 0{,}5$	$+\ 2{,}5$	$+\ 1{,}0$	$z=+0{,}1$.	
$[\varphi]\cdot c+\lambda\odot\cdot$	49 47 51,4	85 04 02,1	108 09 40,6	329 23 29,6	355 57 37,6	39 27 23,1		
$[\varphi]=\mathrm{arctg}\frac{x-[x]}{y-[y]}$	49 47 51,0	85 04 02,0	108 09 40,6	329 23 29,0	355 57 37,2	39 27 21,4		

Derselbe Punkt II wurde ein zweites Mal ausgeglichen, wobei die Orientierung des Satzes nach Formel (31) also $(\varphi_0) = \frac{286{,}2}{6} = 47{,}7$ erfolgte. Der Gang der Ausgleichung ist aus der folgenden Tabelle und aus der Figur 14 (Seite 44) ersichtlich.

Nach Bestimmung der Werte $\lambda_{(1)}$ von Punkt (1) aus wurde die Orientierung des Satzes um $z_1 = +12''$ geändert, also die einzelnen Strahlen um die betreffenden Beträge im gleichen Sinne parallel verschoben worauf sich durch die zweite Ausgleichung Punkt (2) ergab. Der endgültige Punkt ⊙ wird dann nach der in der Figur 14 enthaltenen Rechnung ((29) und (30)) gefunden. Die Bestimmung der endgültigen Direktionswinkel ist die gleiche wie vorhin.

$[x] = -61\,234{,}98 \cdot [y] = -45\,814{,}63$. (2. Ausgleichung.)

	1	2	3	4	5	6	λ	$p\lambda\lambda$
$(\varphi) =$	49° 47′ 44,″2	85° 03′ 58,″3	108° 09′ 40,″3	329° 23′ 20,″8	355° 57′ 29,″1	39 27 00,5	−4,5	20,2
							+1,2	1,4
							+1,4	2,0
$c = (\varphi_0) + \gamma =$	49 47 47,7	85 03 52,7	108 09 30,7	329 23 21,7	355 57 26,7	39 27 13,7	−1,2	1,4
$\varphi_q - ⓟ =$	.	.	.	.	.	.	+2,5	6,2
$ⓟ =$							+0,5	0,3
								31,5
$w = (\varphi) - c =$	−3,″5	+5,″6	+9,″6	−0,″9	+2,″4	−13,″2		
$p =$	1	1	1	1	1	1	$m = \sqrt{\frac{31{,}5}{6-3}} =$	
$\lambda\odot =$	+4,0	+9,7	+9,9	+7,3	+11,0	+9,0	$= \pm 3{,}''24$	
$[\varphi] = c + \lambda\odot =$	49 47 51,7	85 04 02,4	108 09 40,6	329 23 29,0	355 57 37,7	39 27 22,7	$m_x = \pm 0{,}012$	
							$m_y = \pm 0{,}014$	
$[\varphi] = \operatorname{arctg}\frac{x - [x]}{y - [y]}$	49 47 51,0	85 04 02,0	108 09 40,6	329 23 29,0	355 57 37,2	39 27 21,4	$z = +8{,}''5$	
							$(\varphi_0) = 47{,}''7$	

III. Abschnitt.

Ausgleichung eines vor- und rückwärts (kombiniert) eingeschnittenen Punktes.

11. Ableitung der Widersprüche.

Auf den äußeren Punkten wurden durch Beobachtungen die Direktionswinkel φ_q der Strahlen nach dem gesuchten Punkt in derselben Weise wie beim Vorwärtseinschneiden bestimmt. Deren Gewichte p_v sind ebenfalls bekannt.

Auf dem gesuchten Punkte wurden die Richtungen γ mit den Gewichten p_r nach äußeren Punkten beobachtet. Unter diesen können sich auch einige der vorher erwähnten Punkte befinden, so daß dann solche Strahlen vor- und rückwärts (kombiniert) beobachtet sind.

Nachdem man sich auf irgendwelche Weise gute Näherungswerte $(x)(y)$ des zu bestimmenden Punktes verschafft hat, bestimmt man nach Gleichung (1) die Direktionswinkel (φ).

Die hierauf folgende Aufstellung der Widersprüche w geschieht für die nur vorwärts beobachteten Strahlen nach Formel (4) und für die nur rückwärts beobachteten Strahlen nach (32) oder (31) und (23).

Wenn kombinierte Strahlen vorhanden sind, empfiehlt es sich, dieselben mit zur Orientierung der Richtungen auf dem gesuchten Punkte zu benützen. Im allgemeinen wird unter der oben angegebenen Voraussetzung die Orientierung besser werden, wenn dieselbe durch die Richtungsmessungen auf dem gesuchten Punkte und durch die vorwärts beobachteten Strahlen erfolgt, als wenn nur die kombinierten Strahlen hiezu verwendet werden. Bei Beachtung des in Absatz 9 Bemerkten erhält man die Orientierung (genähert) durch:

$$(\varphi_0) = \frac{[(\varphi) - \gamma] + [\varphi_q - \gamma]}{n + n'} \left(\text{wenn etwa } \frac{S_{\min}}{S_{\max}} < \tfrac{1}{2} \right) \qquad (36)$$

(n Anzahl der Rückwärtsstrahlen, n' Anzahl der kombinierten Strahlen.)

oder:
$$(\varphi_0) = \frac{[S^2((\varphi) - \gamma)] + [S^2(\varphi_q - \gamma)]}{[S^2]} \left(\text{wenn } \frac{S_{\min}}{S_{\max}} > \tfrac{1}{2} \right). \qquad (37)$$

Für die nur vorwärts oder rückwärts beobachteten Strahlen ergeben sich dann die Widersprüche nach (4) bezw. (23) zu

$$w = (\varphi) - \varphi_q \pm 180'' \text{ bezw. } w = (\varphi) - ((\varphi_0) + \gamma).$$

Genau so könnten die kombinierten Strahlen behandelt werden. Um aber bei der Ausgleichung möglichst wenig Strahlen zu bekommen, vereinigt man den vor- und rückwärts beobachteten Strahl unter Berücksichtigung der einzelnen Gewichte, so daß der kombinierte Strahl wird:

$$c = \frac{p_r \cdot ((\varphi_0) + \gamma) + p_v \cdot (\varphi_q \pm 180^0)}{p_r + p_v} \tag{38}$$

und dessen Gewicht $$p = p_r + p_v. \tag{39}$$

Der entsprechende Widerspruch ist dann

$$w = (\varphi) - c. \tag{40}$$

12. Graphische Darstellung der Beobachtungen.

Die Aufzeichnung der Strahlen, welche am Näherungspunkt um w'' aus (23), (4) und (40) vorbei gehen, erfolgt genau nach den in den Absätzen 2 und 7 angegebenen Regeln.

13. Aufstellung der Bedingungsgleichungen für den ausgleichenden Punkt, Ausgleichsverfahren.

Die Fehlergleichungen für die nur rückwärts beobachteten Strahlen lauten:

$$\lambda_r = w - z + \alpha\, dy + \beta\, dx \text{ Gewicht } p_r$$

für die nur vorwärts beobachteten Strahlen:

$$\lambda_v = w + \alpha\, dy + \beta\, dx \text{ Gewicht } p_v$$

und die für die kombinierten Strahlen, wie sich leicht aus λ_r und λ_v ergibt:

$$\lambda = w - \frac{p_r}{p} z + \alpha\, dy + \beta\, dx \text{ Gewicht } p = p_r + p_v.$$

Wegen der Bedingung $[p\lambda\lambda]$ = Minimum erhält man die entsprechenden Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} -[p_r \cdot \lambda_r] &= 0 \\ [p_r \alpha \lambda_r] + [p_v \alpha \lambda_v] + [p \alpha \lambda] &= 0 \\ [p_r \beta \lambda_r] + [p_v \beta \lambda_v] + [p \beta \lambda] &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Diese Gleichungen entsprechen den unter (25) aufgestellten und werden auch in derselben Weise wie dort (Absatz 8) angegeben gelöst.

Die Ausgleichung der aufgezeichneten Figur liefert unter Beachtung der verschiedenen Strahlgewichte p_r, p_v und p den Punkt (1). Um zu ersehen ob dieser Punkt auch die erste Bedingung von (41) erfüllt, mißt man von (1) aus bis zu den aufgezeichneten rückwärts und kombiniert beobachteten Strahlen unter Berücksichtigung der Vorzeichenregel in Absatz 4 die kleinen Winkel $\lambda_{(1)}$ ab. Für die nur rückwärts beobachteten Strahlen entspricht dieses $\lambda_{(1)}$ sofort dem in

die erste Bedingungsgleichung einzuführenden λ_r und möge mit $\lambda + (z)$ bezeichnet werden.

Aus den bei den kombinierten Strahlen abgemessenen $\lambda_{(1)}$ bekommt man die entsprechenden λ_r durch Berücksichtigung der Drehungen d der Rückwärtsstrahlen $(\varphi_0) + \gamma$ um die kombinierten Strahlen c zu erhalten.

Also: $$d = c - ((\varphi_0) + \gamma) \quad \text{und demnach} \quad (42)$$

$$\lambda + (z) = \lambda_{(1)} + d. \quad (43)$$

Wird hierauf aus

$$(z) = \frac{[p_r\,(\lambda + (z))]}{[p_r]} \text{ bezw. } = \frac{[\lambda + (z)]}{n}, \quad (44)$$

wenn, wie früher, die Gewichte p_r aller n Rückwärtsstrahlen gleich der Einheit gesetzt werden dürfen, $(z) = 0$, dann kann der erhaltene Punkt als endgültiger betrachtet werden.

Trifft diese Bedingung nicht zu, dann verdreht man den ganzen Satz um

$$z_1 = k \cdot (z) \text{ wobei } k \sim 3 \text{ (wie früher)}. \quad (45)$$

Dadurch erleiden die Rückwärtsstrahlen eine Parallelverschiebung um $\Delta = \frac{z_1}{\varrho} S$, die kombiniert beobachteten Strahlen eine solche um

$$\Delta = \frac{D}{\varrho} S \text{ wenn } D = \frac{p_r}{p} \cdot z_1, \quad (46)$$

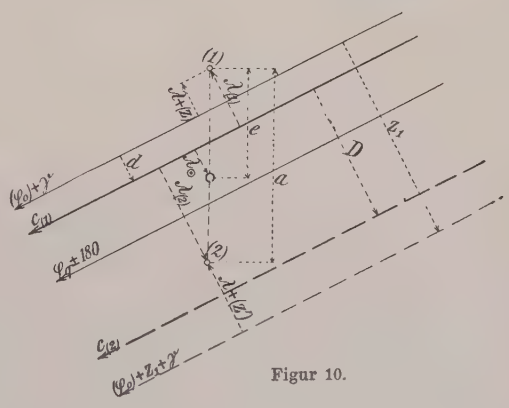
wie sofort aus Gleichung (38) ersichtlich ist.

Nach dieser Parallelverschiebung gleicht man ein zweites Mal mechanisch aus und erhält den Punkt (2). Durch Abmessen der Winkel von (2) bis zu den gezeichneten Strahlen erhält man $\lambda_{(2)}$ und hieraus gemäß nebiger Figur 10 die neuen

$$\lambda + (z') = \lambda_{(2)} + d - z_1 \quad (47)$$

worauf man wie beim Rückwärtseinschneiden berechnet

$$(z') = \frac{[\lambda + (z')]}{n}. \quad (48)$$



Figur 10.

Den endgültigen Punkt $\odot$ $((z'') = 0)$ bekommt man dann in derselben Weise wie früher durch

$$e = a \frac{(z)}{(z) - (z')} \quad (49)$$

und die endgültige Orientierung des Satzes durch

$$z = z_1 \cdot \frac{e}{a}. \quad (50)$$

Nach Hinzufügen der Abstände dx und dy des Punktes ⊙ von den Koordinatenaxen durch $(x)(y)$ hat man die endgültigen Koordinaten zu

$$[x] = (x) + dx \text{ und } [y] = (y) + dy. \tag{51}$$

Die endgültigen Direktionswinkel der Richtungen von diesem Punkte nach den äußeren Punkten folgen dann zu

$$[\varphi] = c + \lambda \odot, \tag{52}$$

wenn unter c jeweils der Direktionswinkel $(\varphi_0) + \gamma$, $\varphi_Q \pm 180^0$ oder c aus Gleichung (38) verstanden wird.

14. Ausgleichung des kombiniert eingeschnittenen Punktes III.

Nach Berechnung der einzelnen $(\varphi) - \gamma$ und $\varphi_Q - \gamma$ ergibt sich durch Formel (37) die Orientierung des Satzes zu

$$(\varphi_0) = 50^0\,02'\,0'' + \frac{6 \cdot 13 + 1{,}2 \cdot 43 + 0{,}7\,(79 + 32) + 3 \cdot 45 + 2\,(45 + 33)}{6 + 1{,}2 + 2 \cdot 0{,}7 + 3 + 2 \cdot 2} =$$

$$= 50^0\,02'\,31''{,}9,$$

worauf die Werte $(\varphi_0) + \gamma$ und c nach (38) gefunden werden.

Die Aufzeichnung der beobachteten Strahlen ist in der Figur 15 (Seite 45) ausgeführt. Nach Annahme eines Näherungspunktes, Abstechen der Stablängen unter Beachtung der Strahlgewichte und Ausgleichung wird Punkt (1) erhalten. Die Abmessung der einzelnen $\lambda_{(1)}$ liefert nach deren Änderung um d aus (42), wie aus der Figur 15 ersichtlich, $(z) = 0''{,}0$, so daß demnach Punkt (1) der endgültige Punkt ist. Die Bestimmung der endgültigen Koordinaten und Direktionswinkel ist in der folgenden Tabelle enthalten.

Punkt III.

$(x) =$	$+ 15\,555{,}19$	$(y) =$	$+ 11\,049{,}97$
$dx =$	$- \quad 0{,}16$	$dy =$	$+ \quad 0{,}10$
$[x] =$	$+ 15\,555{,}03$	$[y] =$	$+ 10\,050{,}07$

Punkte	1	2	3	4	5	6	λ	$p\lambda\lambda$
$y =$	$+ 17\,422{,}65$	$+ 16\,359{,}32$	$+ 14\,977{,}59$	$+ 14\,010{,}32$	$+ 14\,261{,}99$		$- 4{,}0$	16,0
$x =$	$+ 11\,614{,}91$	$+ \ 9\,342{,}44$	$+ \ 9\,490{,}93$	$+ \ 9\,394{,}58$	$+ 10\,434{,}62$		$+ 4{,}7$	22,1
$x - (x) =$	62 $+ 1\,867{,}46$	29 $+ \ 804{,}13$	44 $- \ 577{,}60$	71 $- 1\,544{,}87$	04 $- 1\,293{,}20$		$- 0{,}1$	0,0
$\textcircled{x} =$	84	63	14	49	55			
$y - (y) =$	$+ 1\,564{,}94$	$- \ 707{,}53$	$- \ 559{,}04$	$- \ 655{,}39$	$+ \ 384{,}65$		$- 6{,}1$	37,2
$\textcircled{y} =$	89	4 13	5 07	47	12			
$l\,(\Delta_x - \textcircled{x}) =$	3. 27 12 51	2. 90 53 26	2. 76 16 27 n	3. 18 88 92 n	3. 11 16 66 n		$+ 5{,}4$	29,2
$l\,E\,\sin/\cos\,(\varphi) =$	0. 11 55 1	0. 12 450	0. 14 354	0. 03 594	0. 01 841		$- 0{,}2$	0,0
$l\,(\Delta_y - \textcircled{y}) =$	70 3. 19 44 98	8 06 2. 84 97 85 n	5 21 2. 74 74 43 n	66 2. 81 65 00 n	49 53 2. 58 50 66		$+ 4{,}3$	13,9
								118,4
$l\,\mathrm{tg}\,(\varphi) =$	8 19 0. 07 67 53	6 07 0. 05 55 81 n	39 86 0. 01 41 84 n	2 81 0. 37 23 92	59 0. 52 66 00 n		$m = \sqrt{\frac{118{,}4}{7-3}} =$	
$l\,S =$	3. 38 676	3. 02 983	2. 90 517	3. 22 483	3. 13 008		$= \pm 5{,}45''$	
$S =$	2436	1071	804	1678	1349		$m_x = \pm 0{,}020$	
$(\varphi) =$	$50^0\ 02'\ 13''$	$131^0\ 20'\ 37''$	$225^0\ 56'\ 08''$	$247^0\ 00'\ 42''$	$286^0\ 33'\ 53''$		$m_y = \pm 0{,}015$	
$\gamma =$	0 0 0	81 17 54	175 52 49	196 57 57	236 31 08			
$(\varphi) - \gamma =$	50 02 13	2 43	3 19	2 45	2 45		$(\varphi_0) = 31{,}9''$	
$\varphi_q - \textcircled{\varphi} - \gamma =$	.	.	2 32	.	2 33			
$c = (\varphi_0) + \gamma =$	50 02 31,9	131 20 25,9	225 55 20,9 / 45 55 21 $\}$ 20,9	247 00 28,9	286 33 39,9 / 106 33 41 $\}$ 40,5			
$\varphi_q - \textcircled{\varphi} =$	.	.		.				
$\textcircled{\varphi} =$								
$w = (\varphi) - c =$	$- 18{,}9$	$+ 11{,}1$	$+ 47{,}1$	$+ 13{,}1$	$+ 12{,}5$			
$p =$	1	1	$(1+{}^3/_4) = 1{}^3/_4$	1	$(1+{}^7/_8) = 2$			
$\lambda\odot =$	$- 4{,}0$	$+ 4{,}7$	$- 0{,}1$	$- 6{,}1$	$+ 4{,}8$		$z = 0{,}0$.	
$[\varphi] = c + \lambda\odot =$	50 02 27,9	131 20 30,6	225 55 20,8	247 00 22,8	286 33 45,3			
$[\varphi] = \mathrm{arctg}\frac{x-[x]}{y-[y]}$	50 02 27,9	131 20 30,9	225 55 20,7	247 00 22,7	286 33 44,9			

Der Punkt III wurde ein zweites Mal ausgeglichen, nachdem der Satz durch die hier voraussichtlich eine schlechte Orientierung gebende Formel (31) orientiert war zu

$$(\varphi_0) = 50^0\ 02'\ 45''.$$

Nach Bildung der Widersprüche, Aufzeichnung der beobachteten Strahlen und erster Ausgleichung wurde, wie aus Figur 16 (Seite 46) zu ersehen ist, der Punkt (1) gefunden, welchem $(z) = -11''{,}0$ entspricht. Nach Verdrehung der rückwärts beobachteten Strahlen um $-30''$, der kombinierten Strahlen um die aus (46) folgenden Beträge $-17''{,}2$ bezw. $-15''$ und zweiter Ausgleichung wird Punkt (2) erhalten, dem $(z') = +14''{,}08$ entspricht. Der endgültige Punkt und die Orientierungsverbesserung folgen aus (49) und (50); die Ableitung der endgültigen Koordinaten und Direktionswinkel geschieht wie vorher.

$[x] = +15\,555{,}03 \quad [y] = +10\,050{,}07.$ (2. Ausgleichung.)

$S =$	2436	1071	804	1678	1349	λ	$p\lambda\lambda$	
$(\varphi) =$	50° 02′ 13″	131° 20′ 37″	225° 56′ 08″	247° 00′ 42″	286° 33′ 53″	− 3,6	13,0	
$\gamma =$	0 0 0	81 17 54	175 52 49	196 57 57	236 31 08	+ 5,6	31,4	
						− 0,6	0,4	
$(\varphi) - \gamma =$	50 02 13	2 43	3 19	2 45	2 45	6,3	39,7	
$\varphi_q - ⓟ - \gamma =$			2 32		2 33	+ 4,8	23,0	$(\varphi_0) = \frac{225}{5}$
$c = \begin{cases} (\varphi_0) + \gamma = \\ \varphi_q - ⓟ = \\ ⓟ = \end{cases}$	50 02 45 .	131 20 39 .	225 55 34 / 45 55 21 $\}_{28,5}$	247 00 42 .	286 33 53 / 106 33 41 $\}_{47}$	− 0,7	0,4	$= 45''$
						+ 3,7	10,3	
							118,2	
$w = (\varphi) - c =$	− 32	− 2	+ 39,5	0	+ 6,0	$m = \sqrt{\frac{118,2}{4}} =$		
$p =$	1	1	$(1 + {}^3/_4) = 1\,{}^3/_4$	1	$(1 + {}^7/_5) = 2$	$= \pm 5{,}45''$		
$\lambda\odot =$	− 16,7	− 7,5	− 8,2	− 19,4	− 2,3	$m_x = \pm 0{,}020$		$z = -13{,}1''$
$[\varphi] = c + \lambda\odot =$	50 02 28,3	131 20 31,5	225 55 20,3	247 00 22,6	286 33 44,7	$m_y = \pm 0{,}015$		
$[\varphi] = \operatorname{arctg} \frac{x - [x]}{y - [y]}$	50 02 27,9	131 20 30,9	225 55 20,7	247 00 22,7	286 33 44,9			

IV. Abschnitt.

Genauigkeit des ausgeglichenen Punktes.

Die Verbesserungen der Beobachtungen mit den Gewichten p um den ausgeglichenen Betrag zu erhalten, sollen mit λ bezeichnet werden. Der mittlere Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1 folgt dann zu

$$m = \sqrt{\frac{[p\,\lambda\,\lambda]}{n-k}} \tag{53}$$

worin n die Anzahl der Beobachtungen und k die Zahl der zur eindeutigen Bestimmung aller Unbekannten unbedingt notwendigen Beobachtungen bedeutet. Für Vorwärtseinschneiden ist demnach $k = 2$, für Rückwärts- und kombiniertes Einschneiden $k = 3$.

Die in (53) einzuführenden Werte λ ergeben sich für die drei behandelten Ausgleichsarten auf folgende Weise:

1. Beim Vorwärtseinschneiden entsprechen die abgemessenen $\lambda\odot$ den obigen λ.
2. Beim Rückwärtseinschneiden folgt aus der Gleichung (33a) $\lambda = \lambda\odot - z$, wobei z durch (35) oder (30) bekannt ist. (54)
3. Beim kombinierten Einschneiden entsprechen die bei den nur vorwärts beobachteten Strahlen abgemessenen $\lambda\odot$ den obigen λ.

Für die nur rückwärts beobachteten Strahlen ist

$$\lambda = \lambda\odot - z, \text{ wobei} \tag{55}$$

z aus Gleichung (50) bekannt ist. Bei den vor- und rückwärts beobachteten Strahlen ist

für die Rückwärtsstrahlen

$$\lambda = [\varphi] - ((\varphi_0) + \gamma) - z$$

und für die Vorwärtsstrahlen

$$\lambda = [\varphi] - \varphi_q \pm 180^0 . \tag{56}$$

In diesen Formeln (56) sind alle vorhergehenden Fälle mit enthalten.

Mit Berücksichtigung von m und der Länge der einzelnen Strahlen kann man bei Betrachtung der Schnittfigur die Schärfe des ausgeglichenen Punktes beurteilen. Aber auch die mittleren Fehler des ausgeglichenen Punktes auf irgend einer durch ihn gehenden Geraden, sowie die mittleren Fehler in irgend einer Richtung, also auch die mittleren Koordinatenfehler lassen sich in einfacher Weise bestimmen.

Eine Gerade durch den ausgeglichenen Punkt ⊙ bilde mit der $+y$ Axe den Direktionswinkel α. Wenn ein Strahl von der Länge S und dem Direktionswinkel φ durch ⊙ in dem äußern Punkte eine Drehung um den kleinen Winkel λ ausführt, so verursacht dies eine Verschiebung des Schnittpunkts auf der festen Geraden von

$$\pm dl = \frac{\lambda}{\varrho} \frac{S}{\sin(\varphi - \alpha)}.$$

Geht man auf mittlere Fehler über, so wird

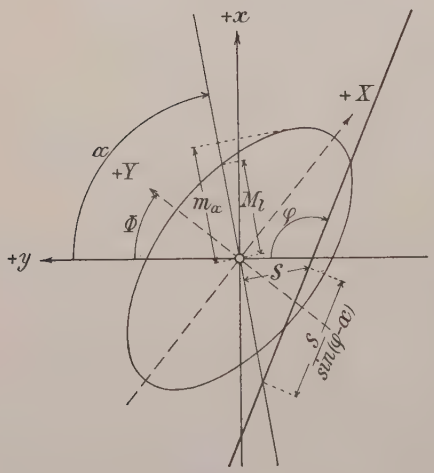
$$m_l^2 = \frac{\lambda^2}{\varrho^2} \frac{S^2}{\sin^2(\varphi - \alpha)},$$

so daß also die Gewichte $\mathfrak{p}$ der einzelnen Strahldurchschnitte proportional den Größen $\frac{\sin^2(\varphi - \alpha)}{S^2}$ werden. Sind die einzelnen Strahlgewichte p ungleich, dann kommt zu $\mathfrak{p}$ noch p als Faktor hinzu. Der mittlere Fehler des ausgeglichenen Punkts auf der Geraden ergibt sich aus allen Schnitten zu

$$M_l^2 = \frac{[p \cdot \mathfrak{p} m_l^2]}{(n-k)[p \cdot \mathfrak{p}]}.$$

Setzt man in diese Gleichung die obigen Werte ein und berücksichtigt (53), dann wird:

$$M_l = \pm \frac{m}{\varrho \sqrt{\left[p \cdot \frac{\sin^2(\varphi - \alpha)}{S^2}\right]}}. \qquad (57)$$



Figur 11.

Für $\alpha = 0^0$ bezw. $\alpha = 90^0$ erhält man die Abschnitte dieser Kurve auf der y bezw. x Axe durch ⊙.

Wie gleich nachher bewiesen wird, ist die durch Gleichung (57) bestimmte Ellipse mit der mittleren Fehlerellipse (nach Helmert) identisch. Deren Fußpunktskurve ergibt deshalb die Kurve der mittleren Fehler[1]), sodaß in nebiger Figur 11 der mittlere Fehler des ausgeglichenen Punktes in der Richtung α überhaupt durch die mit m_α bezeichnete Strecke dargestellt wird.

Von der durch Gleichung (57) bestimmten Ellipse kann man auf

[1]) Helmert, Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höhern Geodäsie. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 13. Jahrgang (1868). S. 87, 90 und Jordan, Handbuch der Vermessungskunde. 1. Band. 3. Auflage (1888). S. 319.

einfache Weise beliebig viele Punkte mit genügender Schärfe angeben, weil sich $\left[p\frac{\sin^2(\varphi-\alpha)}{S^2}\right]$ auf halbgraphischem Wege bequem ermitteln läßt. Nimmt man S nach Andeutung der Figur 11 in den Zirkel (z. B. 1 km = 1 cm), dann kann man sofort $\frac{S}{\sin(\varphi-\alpha)}$ auf einem Maßstabe ablesen. Durch eine einzige Rechenschiebereinstellung oder mit Hilfe der Zahlentabelle Seite 47 findet man meistens sofort $p\frac{\sin^2(\varphi-\alpha)}{S^2}$. In praktischer Hinsicht ist es vorteilhaft, S in Einheiten von km einzuführen, in derselben Einheit erhält man dann auch M_l. Die Ellipsen sind in den Figuren 12 bis 16 eingezeichnet, die mittleren Koordinatenfehler in den entsprechenden Berechnungen angegeben.

15. Untersuchung der Kurve (57).

Löst man zunächst die Summe im Nenner auf und setzt zur vorübergehenden Vereinfachung

$$\frac{m}{\varrho}S_1\,S_2\,S_3\,S_n = K$$
$$\sqrt{p_1}\,S_2\,S_3\,S_n = k_1$$
$$\sqrt{p_2}\,S_1\,S_3\,S_n = k_2$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

dann erhält man nach einigen Umformungen

$$M = \frac{K}{\sqrt{\cos^2\alpha\,[k^2\sin^2\varphi] + \sin^2\alpha\,[k^2\cos^2\varphi] - \frac{\sin 2\alpha}{2}\,[k^2\sin 2\varphi]}}$$

Geht man von den Polarkoordinaten M und α auf rechtwinklige über durch

$$x = M\sin\alpha$$
$$y = M\cos\alpha$$

so wird aus (57) schließlich:

$$x^2\left(\frac{\varrho}{m}\right)^2\left[p\frac{\cos^2\varphi}{S^2}\right] - xy\left(\frac{\varrho}{m}\right)^2\left[p\frac{\sin 2\varphi}{S^2}\right] + y^2\left(\frac{\varrho}{m}\right)^2\left[p\frac{\sin^2\varphi}{S^2}\right] - 1 = 0. \quad (58)$$

Für die vorkommenden Fälle stellt demnach (58) die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse vor. Um die auf die Hauptaxen bezogene Gleichung zu bekommen, dreht man das Axenkreuz um Φ so, daß das Glied mit xy verschwindet, weshalb man setzt:

$$x = X\cos\Phi + Y\sin\Phi$$
$$y = Y\cos\Phi + X\sin\Phi.$$

Man erhält dann aus (58):

$$X^2\left(a\cos^2\Phi + \frac{b}{2}\sin 2\Phi + c\sin^2\Phi\right) + XY\left((a-c)\sin 2\Phi - b\cos 2\Phi\right) +$$
$$+ Y^2\left(a\sin^2\Phi - \frac{b}{2}\sin 2\Phi + c\cos^2\Phi\right) - 1 = 0, \quad (59)$$

wenn a, b, c die Koeffizienten von x^2, xy und y^2 in (58) sind, und daraus:

$$\operatorname{tg} 2\Phi = \frac{b}{a-c} = \frac{\left[p\frac{\sin 2\varphi}{S^2}\right]}{\left[p\frac{\cos 2\varphi}{S^2}\right]} \tag{60}$$

so daß also die Richtungen der zwei Ellipsenhauptaxen bekannt sind. Die Größe derselben könnte dann behufs Konstruktion der Ellipse aus den Hauptaxen rückwärts aus (59) bestimmt werden.

Ist ein Punkt durch mehrere Gerade bestimmt, so liegen um den wahrscheinlichsten Ort desselben alle Lagen gleicher Wahrscheinlichkeit auf konzentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsen. Diese Fehlerellipsen können auch als die geometrischen Örter konstanter Fehlerquadratsummen definiert werden. Setzt man für die Fehlerquadratsumme das Quadrat des mittleren Fehlers der Gewichtseinheit, so erhält man die sogenannte mittlere Fehlerellipse. (Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Punkt ins Innere dieser Ellipse fällt, beträgt 0,39 . . .). Vgl. die beiden in der Fußnote Seite 30 genannten Quellen.

Wenn demnach dem ausgeglichenen Punkte die Fehlerquadratsumme $[p\lambda\lambda]_{min}$ zukommt, dann wird die Gleichung der mittleren Fehlerellipse sein

$$[p\lambda'\lambda'] = [p\lambda\lambda]_{min} + m^2. \tag{61}$$

Da λ' stets sehr klein ist, kann man dafür setzen

$$\lambda' = \frac{h}{S}\varrho, \tag{62}$$

wobei h die Abstände des laufenden Kurvenpunktes von den einzelnen Strahlen mit der Länge S und den Direktionswinkeln φ bedeuten. Die Gleichungen dieser Strahlen, bezogen auf ein beliebiges Axenkreuz, sind, wenn H den Abstand des Koordinatennullpunkts von den Strahlen vorstellt, in der Normalform

$$y' \sin\varphi - x' \cos\varphi - H = 0.$$

Die Abstände h ergeben sich deshalb zu

$$h = y \sin\varphi - x\cos\varphi - H, \tag{63}$$

wenn xy die laufenden Koordinaten der Fehlerkurve vorstellt.

Durch Einführen von (63) in (62) und (61) wird zunächst

$$\left[p \cdot \left(\frac{y\sin\varphi - x\cos\varphi - H}{S}\varrho\right)^2\right] = [p\lambda\lambda]_{min} + m^2$$

und nach dem Ausrechnen und Ordnen:

$$y^2\left[p\frac{\sin^2\varphi}{S^2}\right] - xy\left[p\frac{\sin^2\varphi}{S^2}\right] + x^2\left[p\frac{\cos^2\varphi}{S^2}\right] - 2y\left[\frac{pH}{S^2}\sin\varphi\right] -$$

$$-2x\left[\frac{pH}{S^2}\cos\varphi\right] + \left[\frac{pH^2}{S^2}\right] = \frac{m^2 + [p\lambda\lambda]_{min}}{\varrho^2}.$$

Legt man das Axenkreuz durch den endgültigen Punkt ⊙, dann wird

$$\left[\frac{p\,H}{S^2}\sin\varphi\right]=0\,;\ \left[p\,\frac{H}{S^2}\cos\varphi\right]=0$$

(Ausgleichsbedingung) und

$$\left[p\,\frac{H^2}{S^2}\right]=\frac{[p\,\lambda\,\lambda]_{min}}{\varrho^2}$$

und es verbleibt

$$x^2\left[p\,\frac{\cos^2\varphi}{S^2}\right]-xy\left[p\,\frac{\sin 2\varphi}{S^2}\right]+y^2\left[p\,\frac{\sin^2\varphi}{S^2}\right]-\frac{m^2}{\varrho^2}=0\,. \qquad (64)$$

Diese Ellipse ist demnach, wie durch Vergleichung mit (58) hervorgeht, mit der durch Gleichung (57) bestimmten Fehlerkurve identisch.

V. Abschnitt.

Genauigkeit des mechanischen Ausgleichsverfahrens.

16. Methodische Ausgleichung des Punktes III.

Um die Schärfe der durch die mechanische Ausgleichung gefundenen Resultate beurteilen zu können, wurden sechs Punkte sowohl mechanisch als auch rechnerisch nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen. Die methodische Ausgleichung des Punktes III wurde hier mit beigefügt, um auch den Zahlenaufwand nach beiden Verfahren bequem übersehen zu können.

Die Fehlergleichungen für n' nur vorwärts beobachtete Strahlen lauten nach (5):

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1&=w_1+\alpha_1\,dy+\beta_1\,dx\ \text{Gewicht}\ p_1\\ \lambda_2&=w_2+\alpha_2\,dy+\beta_2\,dx\quad\ \ ,,\quad p_2\\ \lambda_3&=w_3+\alpha_3\,dy+\beta_3\,dx\quad\ \ ,,\quad p_3\end{aligned}\right\}n' \qquad (65)$$

Diejenigen für n nur rückwärts eingeschnittenen Punkte nach (24):

$$\left.\begin{aligned}\lambda_4&=w_4-z+\alpha_4\,dy+\beta_4\,dx\ \text{Gewicht}\ p_4\\ \lambda_5&=w_5-z+\alpha_5\,dy+\beta_5\,dx\quad\ \ ,,\quad p_5\\ \lambda_6&=w_6-z+\alpha_6\,dy+\beta_6\,dx\quad\ \ ,,\quad p_6\end{aligned}\right\}n \qquad (66)$$

Die zu (65) und (66) gehörigen Normalgleichungen sind dann:

$$\begin{aligned} \underline{[p\alpha\alpha]}\,dy + [p\alpha\beta]\,dx + [p\alpha w] &= 0 \\ \underline{[p\beta\beta]}\,dx + [p\beta w] &= 0 \\ \underline{[pww]} & \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned} \underline{[p]}\,z - [p\alpha]\,dy - [p\beta]\,dx - [pw] &= 0 \\ \underline{[p\alpha\alpha]}\,\underline{dy} + [p\alpha\beta]\,dx + [p\alpha w] &= 0 \\ \underline{[p\beta\beta]}\,dx + [p\beta w] &= 0 \\ \underline{[pww]} & \end{aligned} \tag{68}$$

Nach der ersten Reduktion der Gleichungen (68) kann man die übrigbleibenden Gleichungen gliedweise mit (67) vereinigen und durch weitere Reduktionen dx, $[p\lambda\lambda]$, dann dy und z finden. Sind sämtliche Gewichte von (66) gleich, dann kann die erste Reduktion erspart werden dadurch, daß $\frac{1}{n}$ der ersten Normalgleichung von (68) zu jeder der Gleichungen (66) addiert wird, wodurch die neuen Absolutglieder $w' = w - \frac{[w]}{n}$ und die Koeffizienten von dy und dx

$$a = \alpha - \frac{[\alpha]}{n} \text{ bezw. } b = \beta - \frac{[\beta]}{n} \text{ werden.}$$

Der mittlere Gewichtseinheitsfehler wird

$$\mathrm{m} = \sqrt{\frac{[p\lambda\lambda]}{n-3}} \tag{69}$$

und die mittleren Koordinatenfehler

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{P_x}} \text{ und } m_y = \frac{m}{\sqrt{P_y}}$$

wobei P_x und P_y teilweise nebenher erhalten werden.

Die übrigen Fehler- und Kontrollrechnungen sind aus dem Zahlenbeispiel ersichtlich, wobei zu bemerken ist, daß die Ermittlung der Koeffizienten α und β, welche mit 10 dividiert sind, um dy und dx in Dezimetereinheiten zu erhalten, sowie die Ausgleichsrechnungen zum Teile mit dem 25 cm langen Rechenschieber gemacht wurden.

Methodische Ausgleichung des Punktes III.

No.	kz	$a\,dy$	$\beta\,dx$	w	p	a	b	s	w'	p
1	— 1	+ 6,5	— 5,4	— 18,9	1	+ 11,2	— 10,5	+ 0,7	— 32	
2	— 1	+ 14,5	+ 12,7	+ 11,1	1	+ 19,2	+ 7,6	+ 26,8	— 2	
3	— 1	— 18,4	+ 17,8	+ 47,1	1	— 13,7	+ 12,7	— 1,0	+ 34	
4	— 1	— 11,3	+ 4,8	+ 13,1	1	— 6,6	— 0,3	— 6,9	0	
5	— 1	— 14,7	— 4,4	+ 13,1	1	— 10,0	— 9,5	— 19,5	0	
Σ	— 5	— 23,4	+ 25,5	+ 65,5	Σ	+ 0,1	0,0	+ 0,1	0	
$-\frac{\Sigma}{n}$	+ 1	+ 4,7	— 5,1	— 13,1	(3)	— 18,4	+ 17,8	— 0,6	+ 47	$^3/_4$
					(5)	— 14,7	— 4,4	— 19,1	+ 12	1

No.	paa	pab	pas	paw'	pbb	pbs	pbw'	$pw's$	$pw'w'$
1	125,4	— 117,6	+ 7,8	— 358,4	110,2	— 7,4	+ 336,0	— 22,4	1024
2	368,6	+ 145,9	+ 514,6	— 38,4	57,8	+ 203,7	— 15,2	— 53,6	4
3	187,7	— 174,0	+ 13,7	— 465,8	161,3	— 12,7	+ 431,8	— 34,0	1156
4	43,6	+ 2,0	+ 45,5	+ 0,0	0,1	+ 2,1	0,0	0	0
5	100,0	+ 95,0	+ 195,0	+ 0,0	90,2	+ 185,2	0,0	0	0
(3)	253,8	— 245,6	+ 8,3	— 648,6	237,6	— 8,0	+ 627,3	— 21,2	1656
(5)	216,1	+ 64,7	+ 280,8	— 176,4	19,4	+ 84,0	— 52,8	— 229,2	144
Σ	1295,2	— 229,6	+ 1065,7	— 1687,6	676,6	+ 446,9	+ 1327,1	— 360,4	3984

$$1295{,}2\,dy - 229{,}6\,dx - 1687{,}6 = 0$$
$$-\ 229{,}6\,dy + 676{,}6\,dx + 1327{,}1 = 0$$
$$+ 1065{,}6\,dy + 447{,}0\,dx - 360{,}5 = 0$$

	a	b	w'	
a	+ 1295,2	— 229,6	— 1687,6	$dy = +1{,}02\ dm$
b		+ 676,6	+ 1327,1	$P_y = P_x \cdot \frac{1295{,}2}{676{,}6} = 1218$
		— 40,7	— 299	
w'			+ 3984	
			— 2198	
		+ 635,9	+ 1028,1	$dx = -1{,}62_2\ dm$
			+ 1786	$P_x = 635{,}9$
			— 1661	
			+ 125	$= [p\lambda\lambda]$

Kontrolle: (2. Normalgleichung.)

$$-234{,}0 - 1094 + 1327{,}1 = -0{,}9\ .$$

No.	$a\,dy$	$b\,dx$	w'	λ	$p\lambda\lambda$
1	+ 11,4	+ 17,0	— 32	— 3,6	13,0
2	+ 19,6	— 12,3	— 2	+ 5,3	28,1
3	— 14,0	— 20,6	+ 34	— 0,6	0,4
4	— 6,7	+ 0,5	0	— 6,2	38,4
5	— 10,2	+ 15,4	0	+ 5,2	27,0
(3)	— 18,8	— 28,8	+ 47	— 0,6	0,3
(5)	— 15,0	+ 7,1	+ 12	+ 4,1	16,8
Σ	— 33,7	— 21,7	+ 59	+ 3,6	124,0
		+ 3,6			

$$z = \frac{-23{,}8_5 - 41{,}3 + 65{,}5}{5} = + 0{,}''07$$

$$m = \sqrt{\frac{124{,}0}{4}} = \pm 5{,}''57$$

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{P_x}} = \pm 0{,}22_0\ dm$$

$$m_y = \frac{m}{\sqrt{P_y}} = \pm 0{,}15_9\ dm\ .$$

$$[x] = + 15\,555{,}19 - 0{,}162 = + 15\,555{,}03 \pm 0{,}022$$
$$[y] = + 10\,049{,}97 + 0{,}102 = + 10\,050{,}07 \pm 0{,}016$$
$$[\varphi_0] = \quad 50^0\ 02'\ 31{,}9'' + 0{,}1 = \quad 50^0\ 02'\ 32{,}''0\ .$$

	1	2	3	4	5
$(\varphi^0) + \gamma$	$50^0\ 02'\ 31{,}''9$	$131^0\ 20'\ 25{,}''9$	$225^0\ 55'\ 20{,}''9$	$247^0\ 00\ 28{,}''9$	$286^0\ 33'\ 39{,}''9$
$+ z$	+ 0,1	+ 0,1	+ 0,1	+ 0,1	+ 0,1
$+ \lambda$	— 3,6	+ 5,3	— 0,6	— 6,2	+ 5,2
$[\varphi]$	50 02 28,4	131 20 31,3	225 55 20,4	247 00 22,8	286 33 45,2
$\varphi_q + \lambda$	.	.	45 55 20,4	.	106 33 45,1
$\Delta_x - ⓧ$	+ 1867,62	+ 804,29	— 577,44	— 1544,71	— 1293,04
$\Delta_y - ⓨ$	+ 1564,84	+ 707,63	— 559,14	— 655,49	+ 384,55
log Δ_x	3. 27 12 89	2. 90 54 13	$2.\ 76\ 15\ 07_n$	$3.\ 18\ 88\ 47_n$	$3.\ 11\ 16\ 12_n$
log Δ_y	3. 19 44 70	$2.\ 84\ 98\ 06_n$	$2.\ 74\ 75\ 21_n$	$2.\ 81\ 65\ 66_n$	2. 58 49 53
ltg $[\varphi]$	0. 07 68 19	$0.\ 05\ 56\ 07_n$	0. 01 39 86	0. 37 22 81	$0.\ 52\ 66\ 59_n$
$[\varphi] =$	50 02 27,9	131 20 30,9	225 55 20,7	247 00 22,7	286 33 44,9

17. Mechanische Ausgleichung der Punkte IV, V und VI.

Die Ergebnisse der mechanischen Ausgleichung der Punkte IV, V und VI sind in der folgenden Tabelle enthalten. Aus derselben ist ersichtlich, daß bei IV Vorwärts-, bei V Rückwärts- und bei VI auch kombinierte Strahlen ausgeglichen wurden.

Punkt IV.

$dx = -0{,}018$; $dy = -0{,}014$.

Punkte	1	2	3	4	5	6	λ	$p\lambda\lambda$
$S =$	1360	1425	1565	1570			+ 3,5	12,2
$(\varphi) =$	315° 20′ 02″	47° 20′ 12″	106° 12′ 25,″4	196° 58′ 52,″5			+ 0,2	0,0
							+ 5,0	18,7
$\gamma =$							+ 2,8	5,8
$(\varphi) - \gamma -$								36,7
$\varphi_Q - Ⓟ - \gamma =$								
$c = \begin{cases} (\varphi_0) + \gamma \\ \varphi_Q - Ⓟ - \\ Ⓟ - \end{cases}$	135 20 02	227 20 12	286 12 18	16 58 48			$m = \sqrt{\frac{36,7}{2}} =$	
							$= \pm 4,28$	
$w = (\varphi) - c =$	0	0	+ 7,4	+ 4,5			$m_x = \pm 0,026$	
							$m_y = \pm 0,023$	
$p =$	1	1	3/4	3/4				
$\lambda\odot =$	+ 3,5	+ 0,2	+ 5,0	+ 2,8				
$[\varphi] = c + \lambda\odot =$	315 20 05,5	47 20 12,2	106 12 23,0	196 58 50,5				
$[\varphi] = \operatorname{arctg}\frac{x - [x]}{y - [y]}$	315 20 05,5	47 20 13,3	106 12 23,4	196 58 50,3				

Punkt V.

$dx = -0{,}063$; $dy = +0{,}069$.

$S =$	3615	3100	3615	4470	4470		− 4,7	22,1
$(\varphi) -$	303° 41′ 23,″2	21′ 17′ 01,″1	123° 41′ 23,″4	206° 34′ 01,″0	243° 26′ 16,″9		+ 2,1	4,4
							− 1,7	2,9
$\gamma =$	0 0 0	77 35 38	180 00 00	262 52 31	299 44 41		− 0,6	0,4
$(\varphi) - \gamma =$	303 41 23,2	23,1	23,4	30,0	35,9		+ 5,1	26,0
$\varphi_Q - Ⓟ - \gamma =$	.	.	.	.	.		+ 0,2	55,8
$c \begin{cases} (\varphi_0) + \gamma \\ \varphi_Q - Ⓟ = \\ Ⓟ = \end{cases}$	303 41 27,1	21 17 05,1	123 41 27,1	206 33 58,1	243 26 08,1		$m = + 5,″29$	
	.	.	.	.	.		$m_x = \pm 0,058$	
							$m_y = \pm 0,061$	
$w = (\varphi) - c =$	− 3,9	− 4,0	− 3,7	+ 2,9	+ 8,8		$(\varphi) = 20 +$	
$p =$	1	1	1	1	1		$+ \frac{35,6}{5} = 27,″1$	
$\lambda\odot =$	− 5,2	+ 1,6	− 2,3	− 1,1	+ 4,6		$z = - 0,5$	
$[\varphi] = c + \lambda\odot =$	303 41 21,9	21 17 06,7	123 41 24,8	206 33 57,0	243 26 12,7			
$[\varphi] = \operatorname{arctg}\frac{x - [x]}{y - [y]}$	303 41 21,6	21 17 06,4	123 41 24,9	206 33 57,1	243 26 12,8			

Punkt VI.

$dx = -0{,}031$; $dy = +0{,}012$.

Punkte	1	2	3	4	5	6	λ	$p\lambda\lambda$
$S=$	2000	2245	4890	2000	3660	3605	+ 0,2	0,0
							— 3,7	13,7
$(\varphi)=$	270° 02′ 26″	330° 26′ 08″	1° 27′ 05″,7	89° 57′ 38″,7	120° 59′ 35″,5	236° 20′ 06″,0	+ 0,3	0,1
							+ 3,4	11,6
$\gamma=$	0 0 0	63 23 50	91 24 42	179 55 12	210 57 14	326 17 37	— 3,3	10,9
							+ 2,6	6,8
$(\varphi)-\gamma=$	270 02 36	2 18	2 23,7	2 26,7	2 21,5	2 29,0	— 1,2	1,0
							+ 2,9	6,3
$\varphi_q-\textcircled{\varphi}-\gamma=$	2 26	2 18	.	.	2 30,0	.	— 8,7	56,7
								107,1
$c=\begin{cases}(\varphi_0)+\gamma=\\ \varphi_q-\textcircled{\varphi}=\\ \textcircled{\varphi}=\end{cases}$	$\begin{matrix}270\,02\,24{,}8\\ 90\,02\,26\end{matrix}\Big\}25{,}3$	$\begin{matrix}333\,26\,14{,}8\\ 153\,26\,08\end{matrix}\Big\}11{,}9$	1 27 06,8	89 57 36,8	$\begin{matrix}120\,59\,38{,}8\\ 300\,59\,44\end{matrix}\Big\}41{,}0$	236 20 01,8	$m = +4''{,}22$	
			.	.		.	$(\varphi_0)=\frac{2110}{85}=$	
$w=(\varphi)-\ =$	+ 0,7	— 3,9	— 1,1	+ 1,9	— 5,5	+ 4,2	$=24''{,}8$	
							$m_x=\pm 0{,}032$	
$p=$	$(1+{}^3/_4)=1^3/_4$	$(1+{}^3/_4)=1^3/_4$	1	1	$(1+{}^3/_4)=1^3/_4$	1	$m_y=\pm 0{,}022$	
$\lambda\odot=$	— 0,5	— 1,0	+ 0,1	+ 3,2	— 5,7	+ 2,6	$z=-0{,}2$	
$[\varphi]=c+\lambda\odot=$	270 02 24,8	333 26 10,9	1 27 06,9	89 57 40,0	120 59 35,3	236 20 04,4		
$[\varphi]=\operatorname{arctg}\frac{x\cdot[x]}{y\cdot[y]}$	270 02 25,4	333 26 10,4	1 27 07,0	89 57 39,7	120 59 35,2	236 20 04,6		

18. Vergleichung der Resultate der methodischen und mechanischen Ausgleichung.

In der folgenden Tabelle sind von 6 Punkten die Ergebnisse der rechnerischen und der mechanischen Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate zusammengestellt. Bei letzterer wurden nur die Resultate der ersten Ausgleichung (Orientierung nach der allgemeinen Formel (37)) benützt. Zuerst sind die Zahlen der mechanischen Ausgleichung vorgetragen, darunter stehen die entsprechenden der rechnerischen; die Differenzen δ sind die Verbesserungen der ersteren um letztere zu erhalten. Bemerkt möge noch werden, daß die Zahlen m_x und m_y im allgemeinen wenig von den aus Formel (57) für $\alpha = 90^0$ und $= 0^0$ gefundenen Werten M_x und M_y abweichen.

Punkt	dx	δ_x	dy	δ_y	$[\varphi_0]$	Diff.	m	δ_m	m_x	δ_{m_x}	m_y	δ_{m_y}	λ_{max}	$\delta\lambda$
	mm	mm	mm	mm	"	"	"	"	mm	mm	mm	mm	"	"
I	— 4	0	— 38	0	.	.	± 5,97	0,20	± 21	0	± 16	0	— 7,1	+ 0,3
	— 4		— 38		.		5,77		21		16		— 6,8	
II	— 73	0	+ 31	+ 2	56,2	0,0	3,31	0,07	12	4	15	0	— 4,8	+ 0,2
	— 73		+ 33		56,2		3,24		16		15		— 4.6	
III	— 164	+ 2	+ 99	+ 3	31,9	+ 0,1	5,45	0,12	20	2	15	1	— 6,1	— 0,1
	— 162		+ 102		32,0		5,57		22		16		— 6,2	
IV	— 18	0	— 14	— 1	.	.	4,28	0,07	26	3	23	1	+ 5,0	— 0,3
	— 18		— 15		.		4,21		23		22		+ 4,7	
V	— 63	— 3	+ 69	+ 1	26,6	+ 0,1	5,29	0,10	58	2	61	3	+ 5,1	— 0,1
	— 66		+ 70		26,7		5,39		60		64		+ 5,0	
VI	— 31	— 2	+ 12	+ 2	24,6	0,0	4,22	0,11	32	4	22	1	— 8,7	— 0,1
	— 33		+ 14		24,6		4,33		36		23		— 8,8	
Mittel		1,17		1,50		0,05		0,11		2,50		1,00		0,18
		1,33								1,75				

Punkt	$\frac{\delta_x}{m_x}$	$\frac{\delta_y}{m_y}$	$\frac{\delta_{m_x}}{m_x}$	$\frac{\delta_{m_y}}{m_y}$	$\frac{\delta_m}{m}$	$\frac{\delta\lambda}{\lambda_{max}}$
I	0,000	0,000	0,000	0,000	0,035	0,044
II	0,000	0,133	0,250	0,000	0,022	0,043
III	0,091	0,187	0,091	0,063	0,022	0,016
IV	0,000	0,045	0,130	0,045	0,017	0,064
V	0,050	0,016	0,033	0,047	0,019	0,020
VI	0,056	0,087	0,111	0,043	0,025	0,011
Mittel	0,033	0,078	0,102	0,033	0,023	0,033
	0,055		0,067		$^1/_{43}$	$^1/_{30}$
	$^1/_{18}$		$^1/_{15}$			

Man erhält demnach folgende Schlußergebnisse:

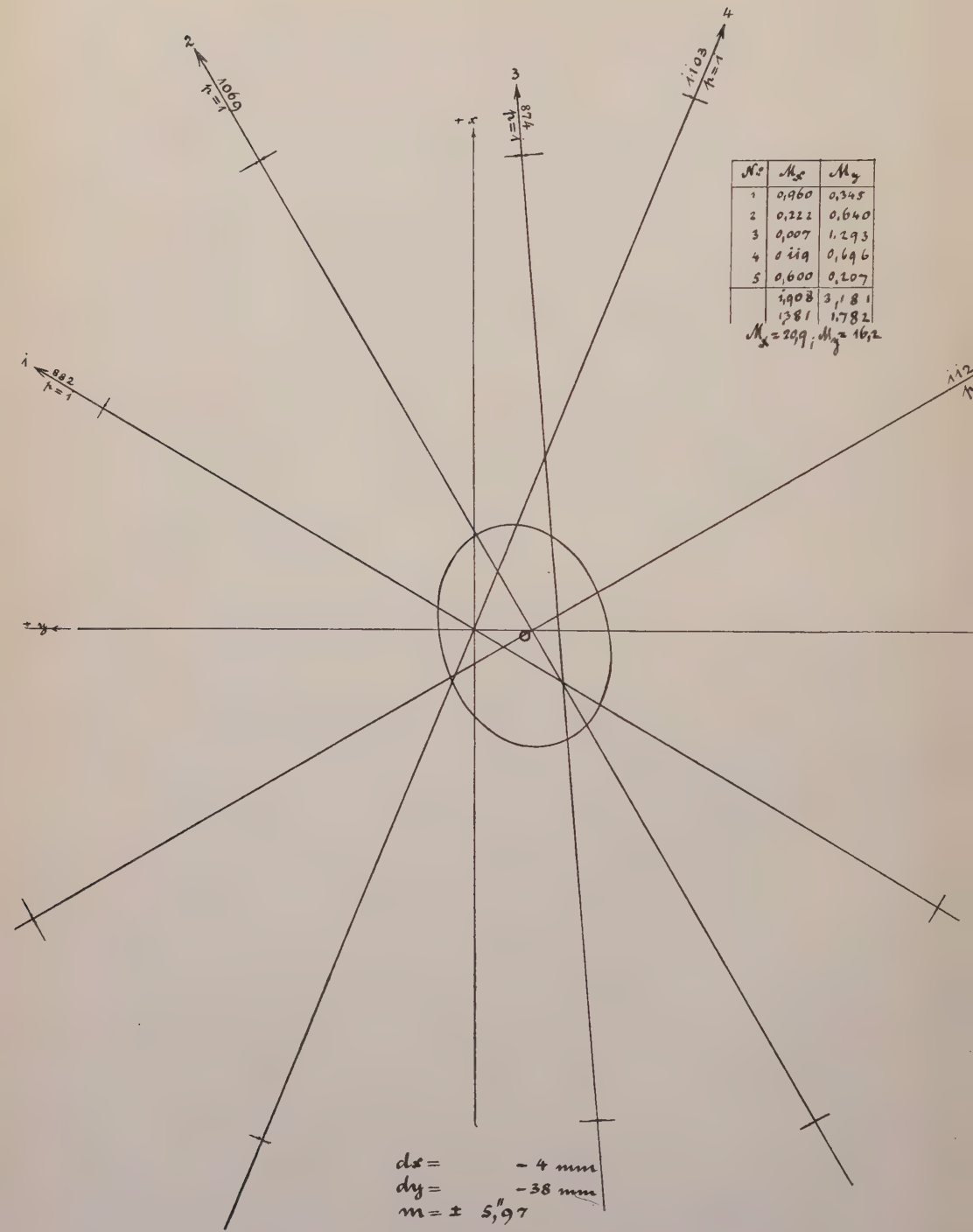
Die Abweichungen zwischen den zwei Ausgleichsresultaten betragen im Durchschnitte:

1. in den Koordinaten 0,1 cm oder $\frac{1}{18}$ der mittleren Koordinatenfehler;
2. in den mittleren Koordinatenfehlern 0,2 cm oder $\frac{1}{15}$ von deren Betrage;
3. in den mittleren Richtungsfehlern $0''{,}1$ oder $\frac{1}{43}$ ihres Betrages und
4. in den Maximalfehlern λ $0''{,}2$ oder $\frac{1}{30}$ von deren Betrage.

Aus diesen Resultaten folgt, daß die angegebenen Ausgleichsmethoden den strengsten Anforderungen genügen.

Punkt I.

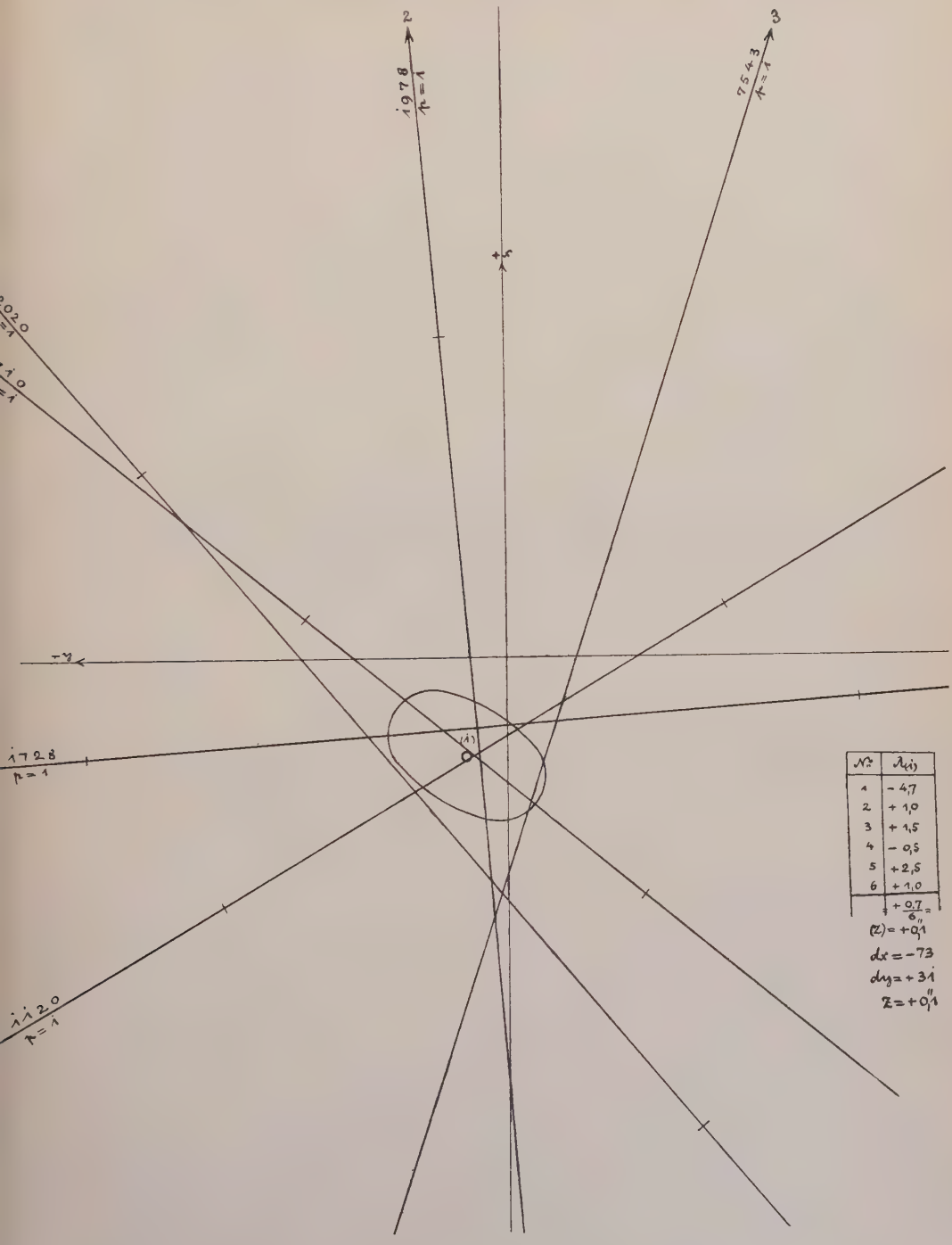
M = 1/5 d. nat. Größe.
Fehlerellipse 0,8 d. nat. Gr.



Figur 12.

Punkt II (1. Ausgleichung).

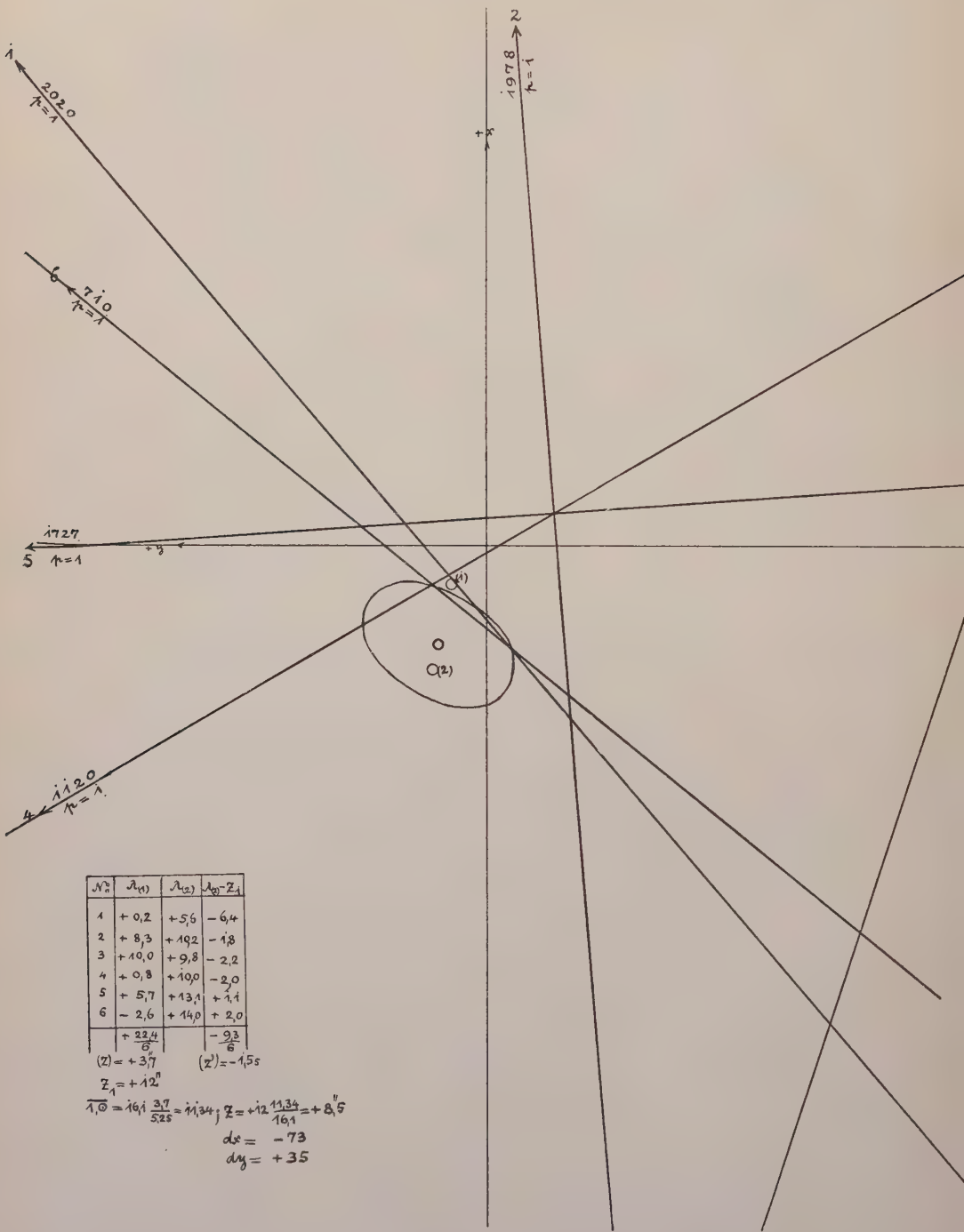
M = 1/5 d. nat. Größe.
Fehlerellipse 0,8 d. nat. Gr.



Figur 13.

Punkt II (2. Ausgleichung).

M = 1/5 d. nat. Größe.
Fehlerellipse 0,8 d. nat. Gr.



Nr.	$\lambda_{(1)}$	$\lambda_{(2)}$	$\lambda_2 - z_1$
1	+ 0,2	+ 5,6	− 6,4
2	+ 8,3	+ 10,2	− 1,8
3	+ 10,0	+ 9,8	− 2,2
4	+ 0,8	+ 10,0	− 2,0
5	+ 5,7	+ 13,1	+ 1,1
6	− 2,6	+ 14,0	+ 2,0
	$+\frac{22,4}{6}$		$-\frac{9,3}{6}$

$(z) = +3,7''$ $\quad (z') = -1,55$

$z_1 = +12''$

$\overline{1,0} = 16,1\,\frac{3,7}{5,25} = 11,34$; $z = +12\,\frac{11,34}{16,1} = +8,''5$

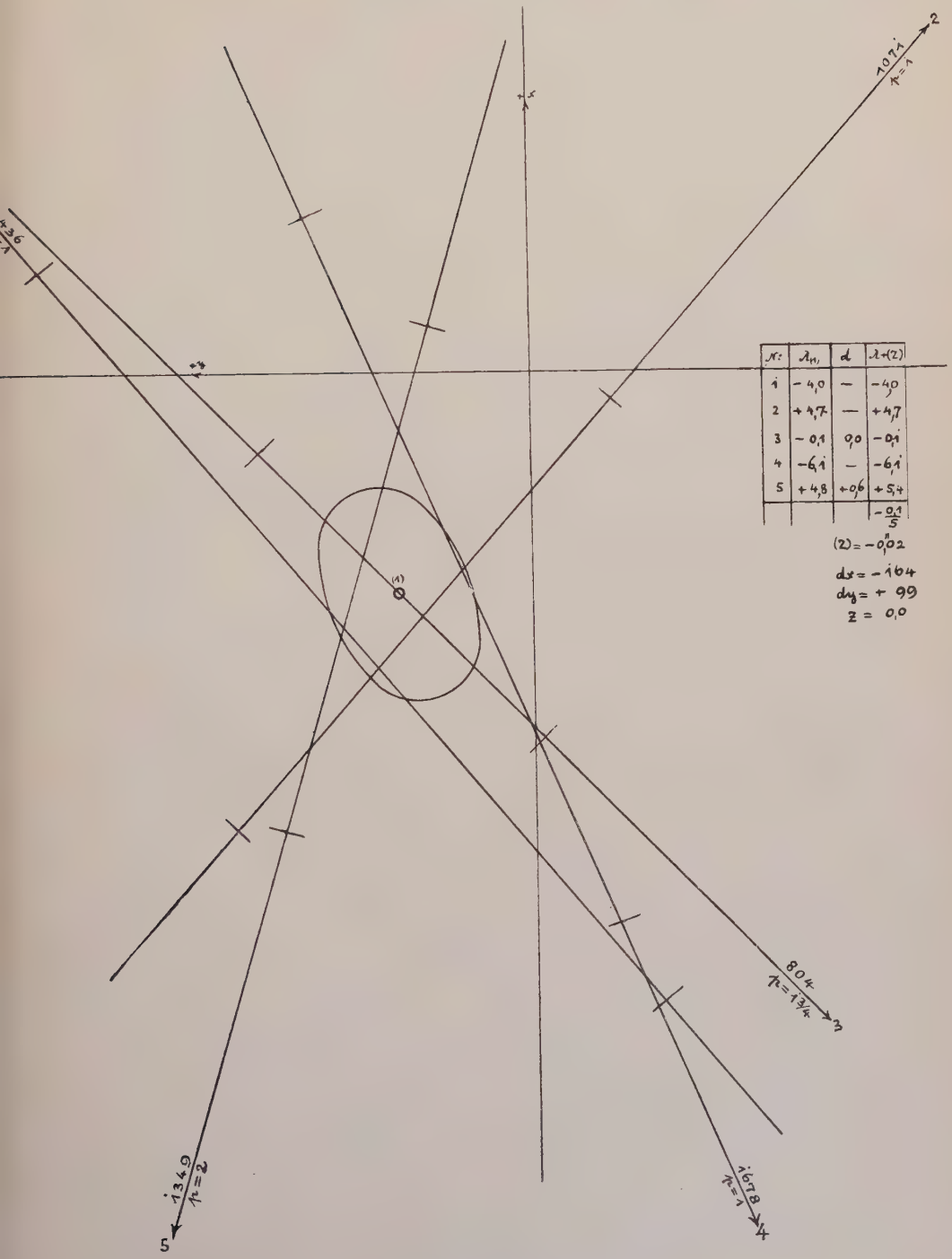
$dx = -73$

$dy = +35$

Figur 14.

Punkt III (1. Ausgleichung).

M = 1/5 d. nat. Größe.
Fehlerellipse 0,8 d. nat. Gr.



N:	λ_{H_1}	d	$\lambda+(Z)$
1	− 4,0	—	− 4,0
2	+ 4,7	—	+ 4,7
3	− 0,1	0,0	− 0,1
4	− 6,1	—	− 6,1
5	+ 4,8	+ 0,6	+ 5,4
			$-\frac{0,1}{5}$

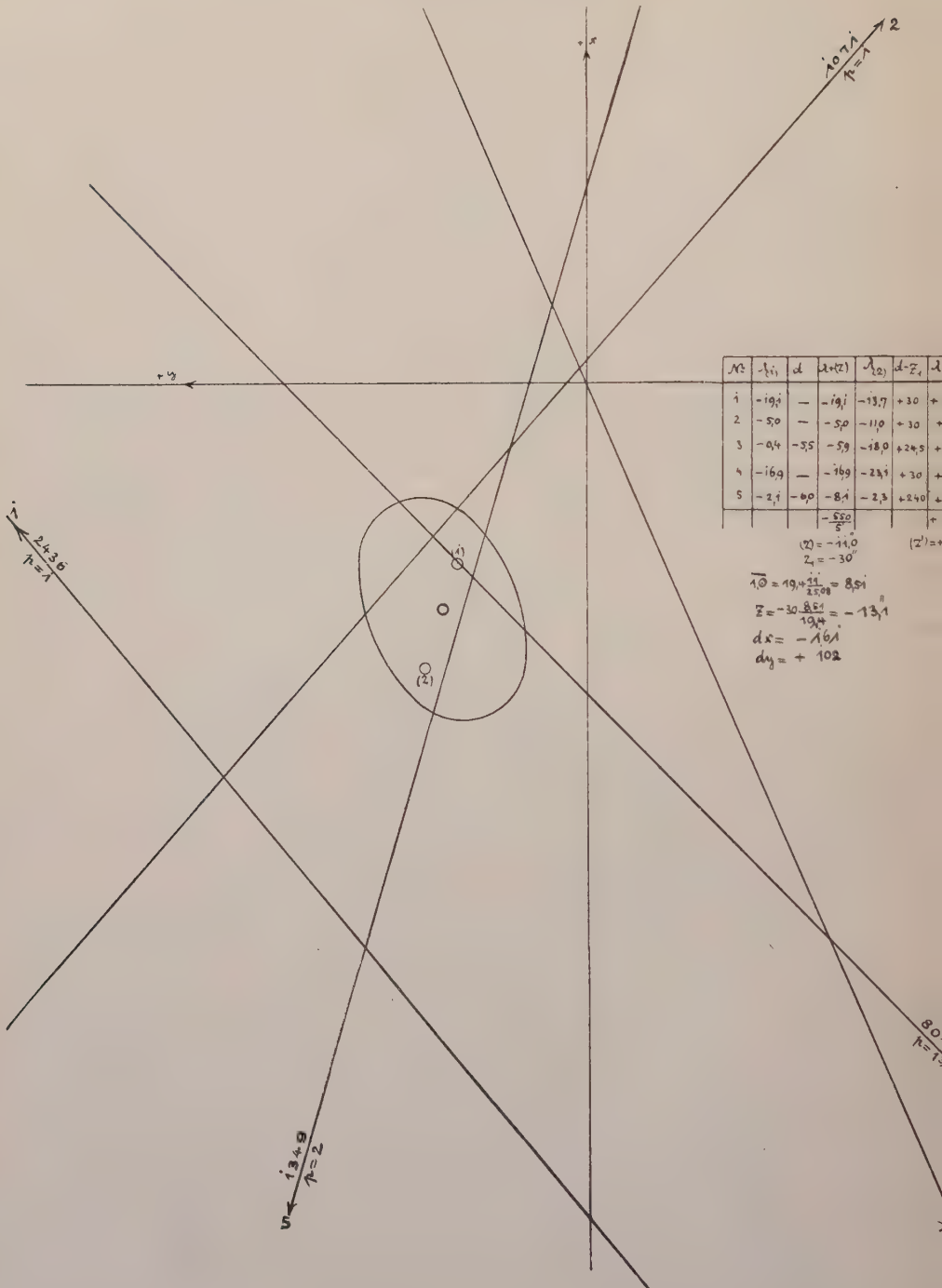
(Z) = − 0,″02

dx = − 164
dy = + 99
z = 0,0

Figur 15.

Punkt III (2. Ausgleichung).

M = 1/5 d. nat. Größe.
Fehlerellipse 0,8 d. nat. Gr.

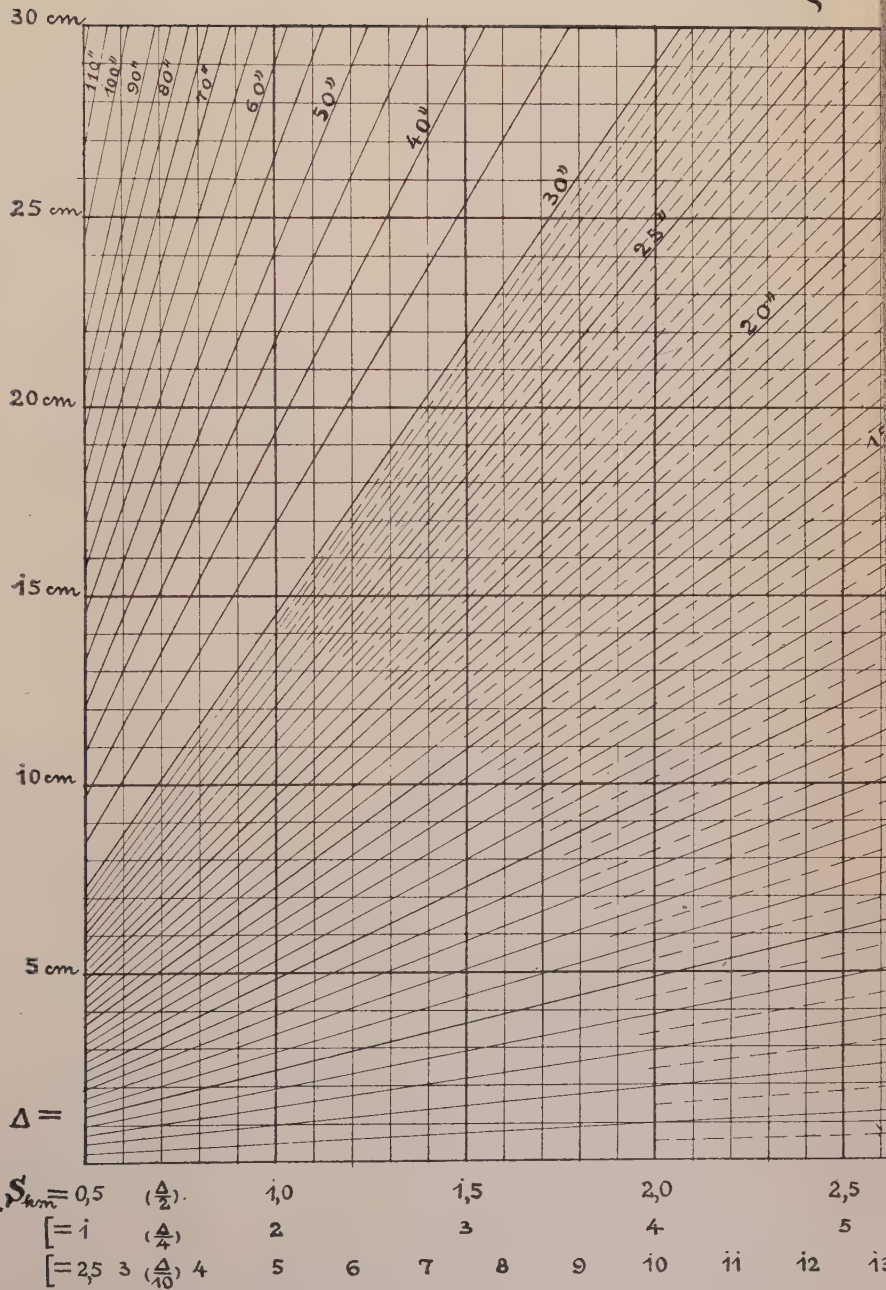


Figur 16.

$\frac{S}{\sin\varphi}$	$\frac{\sin^2\varphi}{S^2}$	Diff.	$\frac{S}{\sin\varphi}$	$\frac{\sin^2\varphi}{S^2}$	Diff.	$\frac{S}{\sin\varphi}$	$\frac{\sin^2\varphi}{S^2}$	Diff. für 0,01	$\frac{S}{\sin\varphi}$	$\frac{\sin^2\varphi}{S^2}$	Diff. für 0,01
0,50	4,000	150	0,80	1,563	38	1,10	0,828	15	2,0	0,250	2,3
1	3,850	145	1	1,525	37	2	0,798	14	1	0,227	2,0
2	3,705	140	2	1,488	36	4	0,770	13	2	0,207	1,8
3	3,565	132	3	1,452	35	6	0,744	12,5	3	0,189	1,5
4	3,433	123	4	1,417	33	8	0,719	11	4	0,174	1,4
5	3,310	117	5	1,384	31	1,20	0,696	11	5	0,160	1,2
6	3,193	111	6	1,353	31	2	0,673	11	6	0,148	1,1
7	3,082	106	7	1,322	30	4	0,651	10	7	0,137	0,9
8	2,976	101	8	1,292	29	6	0,631	10	8	0,128	0,9
9	2,875	95	9	1,263	28	8	0,611	9	9	0,119	0,8
0,60	2,780	90	0,90	1,235	27	1,30	0,592	8	3,0	0,111	0,7
1	2,690	85	1	1,208	26	2	0,575	8	1	0,104	0,6
2	2,605	80	2	1,182	24	4	0,558	8	2	0,098	0,6
3	2,525	80	3	1,158	23	6	0,542	7	3	0,092	0,5
4	2,445	75	4	1,135	24	8	0,527	7	4	0,087	0,5
5	2,370	72	5	1,111	23	1,40	0,512	7	5	0,082	0,5
6	2,298	68	6	1,088	23	2	0,497	7	6	0,077	0,4
7	2,230	65	7	1,065	22	4	0,483	6	7	0,073	0,4
8	2,165	63	8	1,043	22	6	0,470	6	8	0,069	0,3
9	2,102	60	9	1,021	21	8	0,457	5	4,0	0,063	0,2
0,70	2,042	56	1,00	1,000	18	1,50	0,446	5,8	5,0	0,040	0,1
1	1,986	56	1	0,982	19	5	0,417	5,2	6,0	0,027	0,1
2	1,930	51	2	0,963	19	1,60	0,391	4,6	7,0	0,020	0,0
3	1,879	50	3	0,944	18	5	0,368	4,2	8,0	0,016	—
4	1,829	49	4	0,926	17	1,70	0,347	4,0	9,0	0,012	—
5	1,780	47	5	0,909	17	5	0,327	3,8	10,0	0,010	—
6	1,733	44	6	0,892	17	1,80	0,309	3,2	12,0	0,007	—
7	1,689	44	7	0,875	17	5	0,293	3,2	14,0	0,005	—
8	1,645	41	8	0,858	15	1,90	0,277	2,8	18,0	0,003	—
9	1,604	41	9	0,843	15	5	0,263	2,6	22,0	0,002	—
0,80	1,563		1,10	0,828		2,00	0,250		32,0	0,001	

Tafel zu

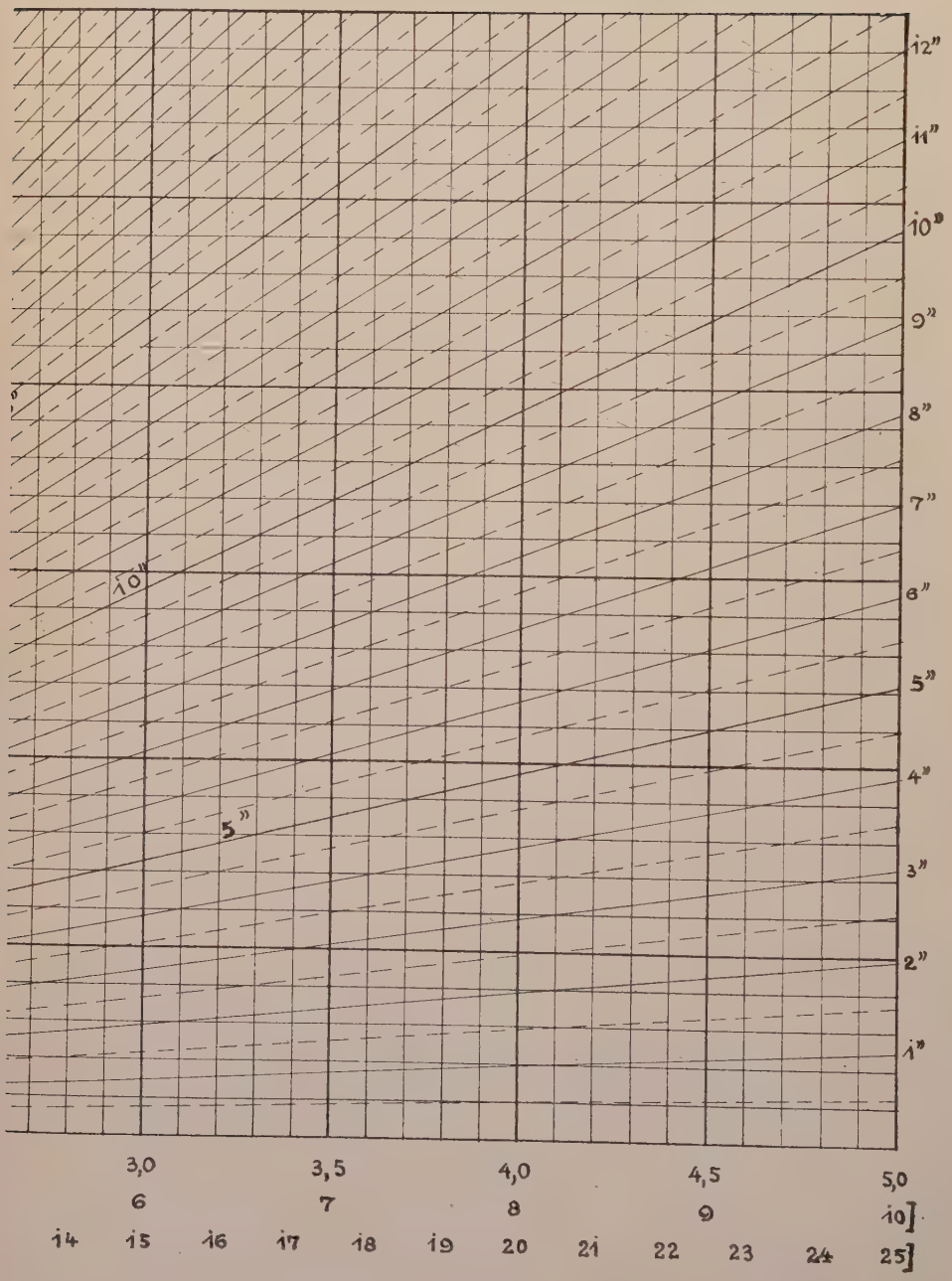
$$\Delta = \frac{v'}{v''} S$$

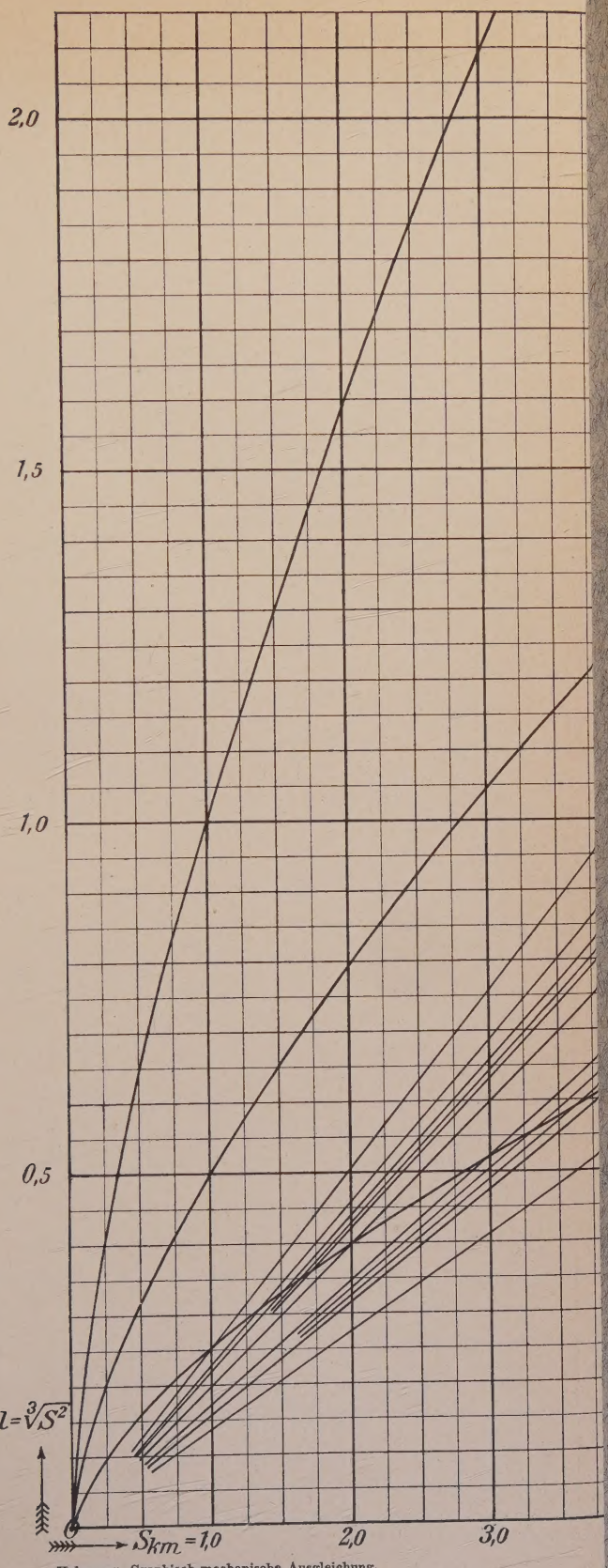


v. Entnahme.

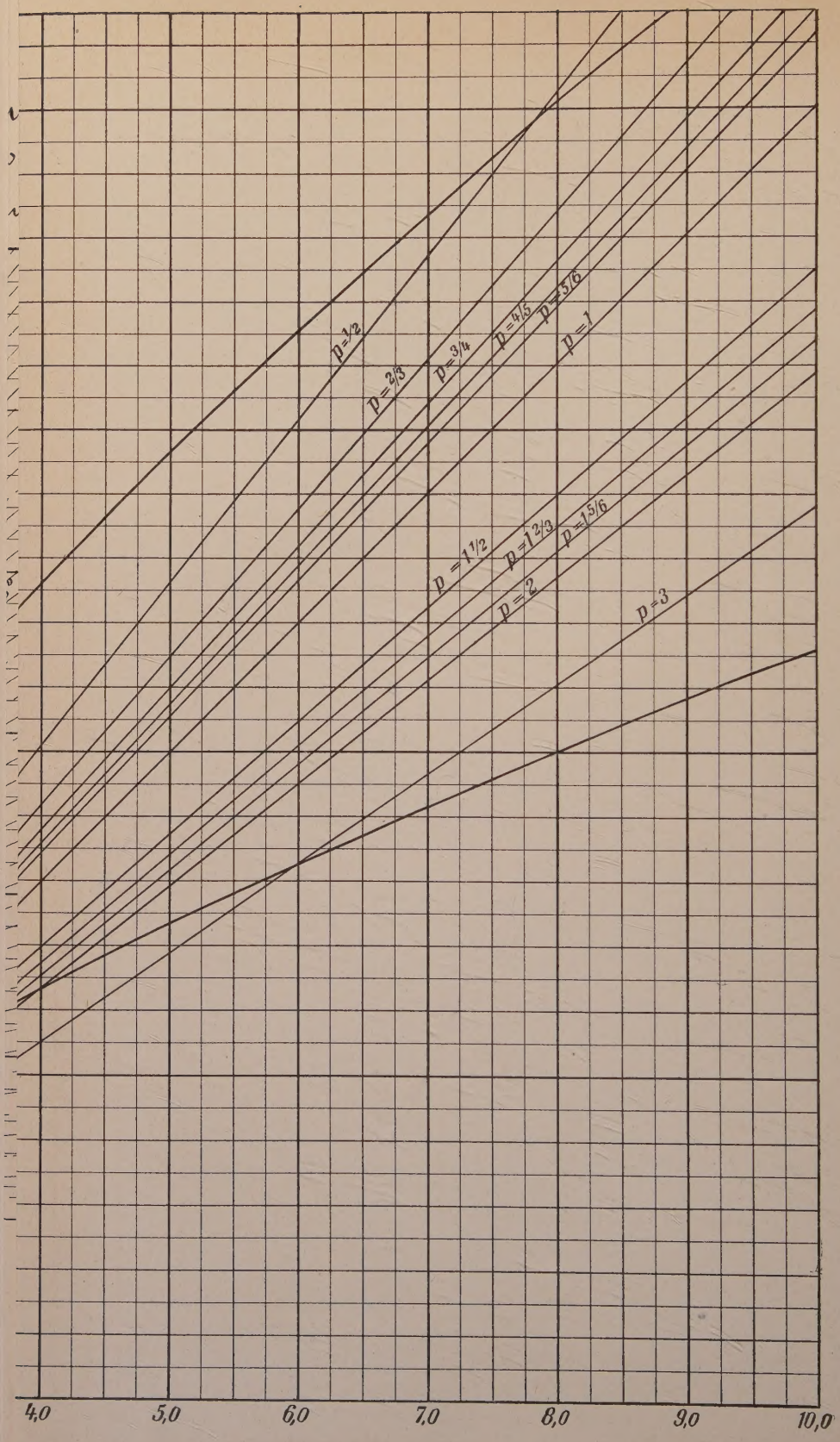
von

und $v'' = \frac{\Delta}{S} \varphi''$.





Hohenner, Graphisch-mechanische Ausgleichung.


p=1/2
p=2/3
p=3/4
p=4/5
p=5/6
p=1
p=1 1/2
p=1 2/3
p=1 5/6
p=2
p=3
4,0
5,0
6,0
7,0
8,0
9,0
10,0